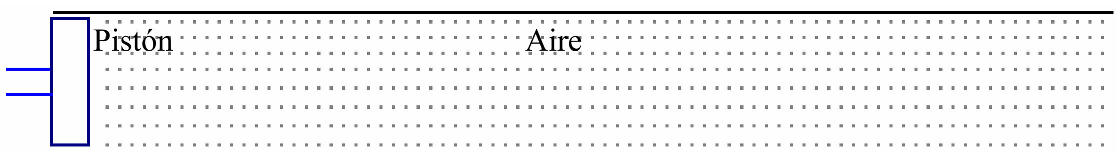
Universidad Pérez Rosales
Departamento de Acústica
Profesor: Jaime Undurraga
e-mail: jaime_undurraga@hotmail.com

Física de la Acústica
Tecnología en Sonido

Tal como definimos, la acústica estudia la generación, transmisión y recepción de energía en forma de vibraciones. Así también definimos el sonido como una perturbación que viaja por un medio (fluidos como el agua, aire, etc.) llegando al receptor y causando así la sensación del sonido.

Podemos entender la emisión y propagación de la vibración en el medio observando el movimiento de un pistón en un tubo tal como se muestra en las figura 1:

- Pistón en reposo, medio en posición de equilibrio o estático.



- Pistón en movimiento, causa compresión de partículas próximas generando la propagación de la vibración.

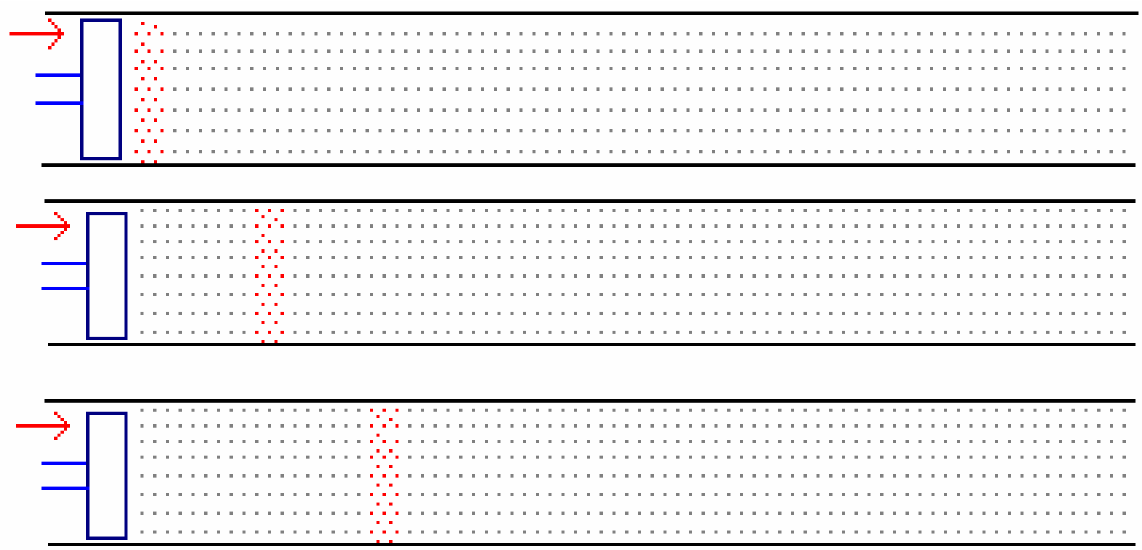


Figura 1

De esta manera podemos darnos cuenta que hay asociada una cierta fuerza de empuje asociada a la superficie del tubo, por lo que definiremos presión como:

$$p = \frac{F}{S} \frac{[N]}{[\mathrm{m}^2]}$$

Donde

$$1\frac{[N]}{[\mathrm{m}^2]} = 1Pa$$

En el caso del aire, las variaciones de presión ocurren en torno a la presión de equilibrio, que en este caso es de 10^5 Pa aproximadamente. Este caso se aprecia en la figura 2:

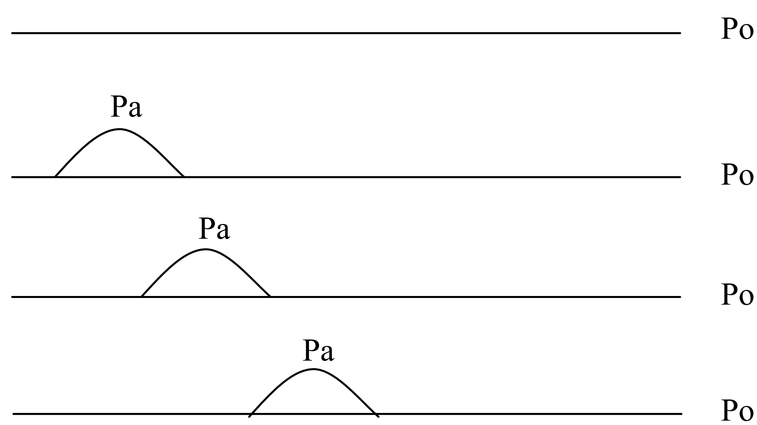


Figura 2

Donde Po es la presión atmosférica y Pa la presión acústica.

1.1 Movimiento armónico simple

En el estudio de los fenómenos ondulatorios, como el sonido, es importante a modo de comprensión de estos, considerarlos como fenómenos de naturaleza periódica, es decir, fenómeno que se repetirá de manera constante cada cierto intervalo de tiempo. Así se comienza el análisis de sistemas los sistemas vibratorios más simples de naturaleza periódica, cuya naturaleza periódica es provocada por la existencia de fuerzas elásticas restauradoras (descritos por la ley de Hooke), las cuales actúan de manera proporcional a la perturbación provocando la vibración armónica del sistema.

Dentro de los fenómenos de naturaleza periódica podemos considerar en nuestro estudio el movimiento de resortes, así como la oscilación de péndulos, pues en estos simples casos podemos observar el fenómeno del movimiento armónico simple.

Así, definimos como **movimiento ondulatorio** aquel en el que el movimiento se repetirá de manera regular sobre la misma trayectoria cada cierto intervalo de tiempo, es decir, un movimiento periódico.

Dentro de este caso podemos considerar el movimiento de una masa sujeta a un resorte helicoidal tal como se muestra en la figura 3:

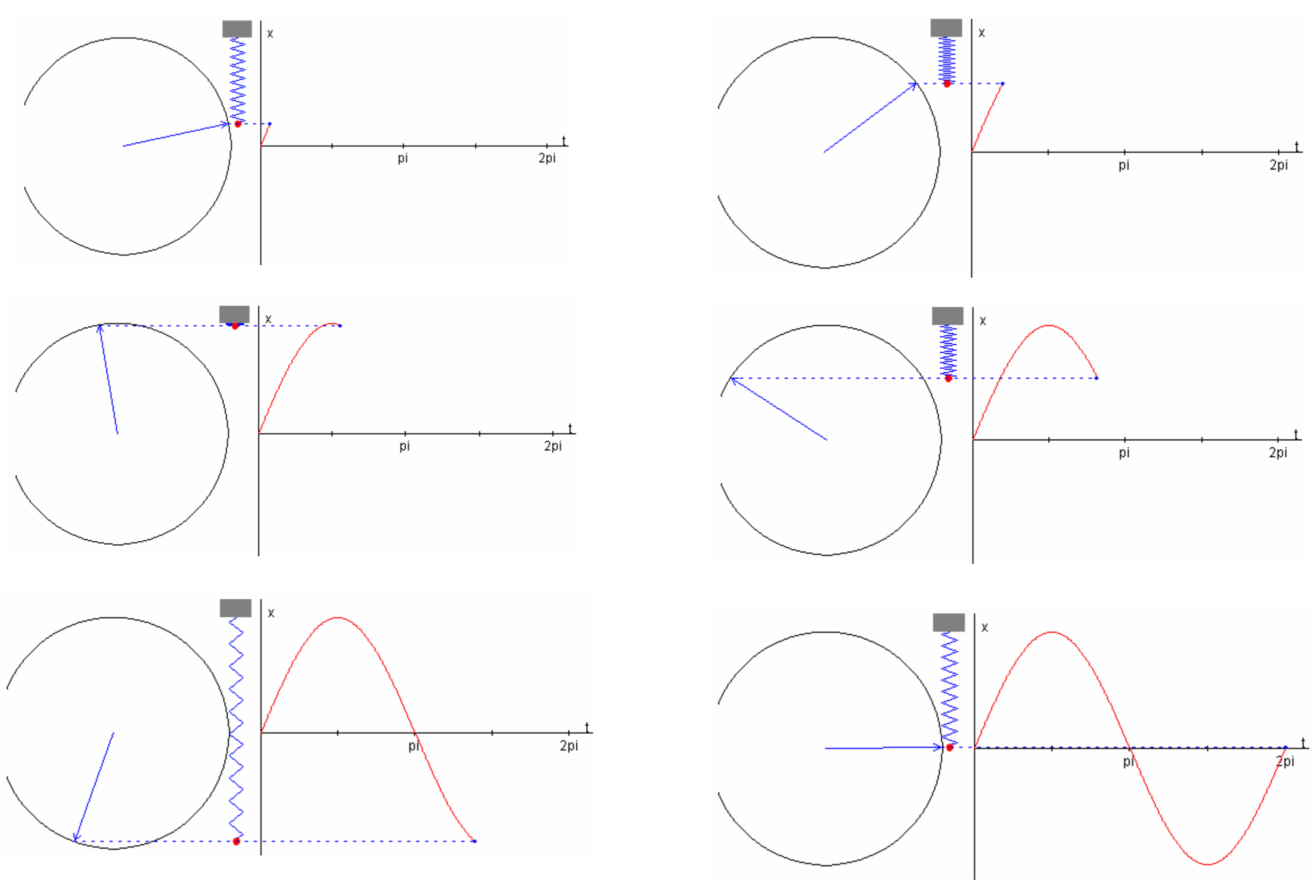


Figura 3

Considerando el problema desde un aspecto físico, si tenemos inicialmente el sistema en reposo, es decir, la masa está fija, al desplazarla en sentido vertical el resorte ejercerá una fuerza en dirección opuesta, ésta fuerza recibe el nombre de fuerza elástica restauradora y que dentro de ciertos rangos se comporta de manera proporcional al desplazamiento efectuado en el resorte, es decir, la fuerza restauradora está dada por:

$$F = -k \cdot x \text{ (Ley de Hooke)}$$

Donde:

- k: constante elástica del resorte y su unidad está en [N/m].
- x: desplazamiento sobre o bajo la posición de equilibrio del resorte.

Nota:
El signo (-) de la ecuación indica que esta fuerza se opondrá al movimiento.

Como observación, podemos decir que cualquier sistema vibratorio cuya fuerza de restauración se oponga directamente proporcional al desplazamiento tiene un movimiento armónico simple. Donde:

- Armónico se refiere a un movimiento senoidal o cosenoidal.
- Simple se refiere a que el movimiento posee una única frecuencia (vibración pura).

Definiciones:

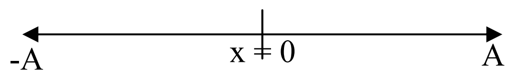
- **Amplitud (A)**: es la amplitud de desplazamiento máxima. Como los valores máximo y mínimo de las funciones seno y coseno son +1 y -1, así el movimiento se realiza en una región del eje x comprendida entre $+A$ y $-A$.
- **Punto de Equilibrio:** es el punto central de la oscilación (x = 0), es decir, el lugar en el que se encuentra el sistema en reposo.
- **Desplazamiento:** es a posición de la partícula respecto a la posición de equilibrio. El signo positivo (+) indicará que se encuentra sobre el punto de equilibrio, el signo negativo (-) indicará que se encuentra bajo el punto de equilibrio.
- **Ciclo:** es el movimiento completo de una oscilación, pasando por el punto inicial de ésta en la misma dirección.
- **Período (T):** es el tiempo necesario para completar un ciclo, por lo que su unidad de medición es el segundo.
- **Frecuencia (f):** es el número de ciclos completados por unidad de tiempo (s) o períodos por segundo. Su unidad de medida es el Hz (1/s).

De esta última queda claro que $T = 1/f$ o $f = \dfrac{1}{T}$

1.2 Ecuación del Movimiento Armónico Simple

Una partícula describe un Movimiento Armónico Simple (M.A.S.) cuando se mueve a lo largo del eje X, estando su posición *x* dada en función del tiempo *t* por la ecuación

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



Donde:

- ω la velocidad o frecuencia angular.
- $\omega t + \varphi$ la fase.
- φ la fase inicial

<u>Observación:</u>

Las funciones seno y coseno son periódicas y se repiten cada 2π, por tanto, el movimiento se repite cuando el argumento de la función seno se incrementa en 2π, es decir, cuando transcurre un tiempo *T* tal que $\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$. Por lo que podemos establecer la relación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Análisis de Amplitud:

Como vimos, un movimiento armónico simple es aquel que se rige por la ecuación

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (1)$$

La ecuación (1) se puede ver en la figura 4:

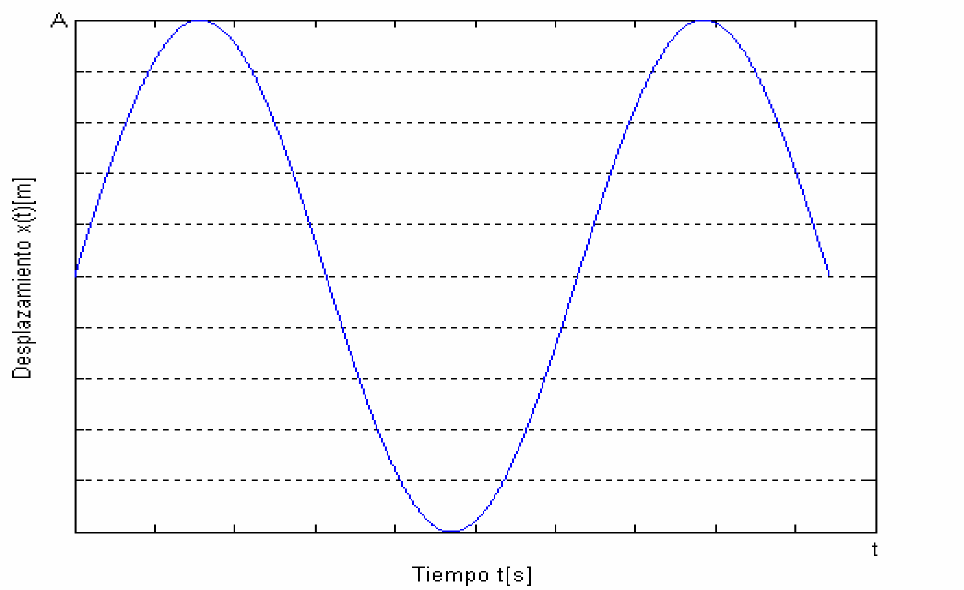


Figura 4

Podemos ver entonces que la amplitud varía a medida que el tiempo avanza, por lo que es conveniente definir de algunas maneras el comportamiento de la amplitud en un ciclo, de esta manera definiremos:

- **Amplitud Promedio (A_{av}):** es el promedio del valor absoluto de la amplitud ponderada en el tiempo en que se completa un ciclo, es decir, en un período T. La amplitud promedio para cualquier señal senoidal o cosenoidal está dada por: $A_{av} = \frac{2A_{máx}}{\pi}$ (2)

- **Amplitud raíz cuadrática media RMS (A_{rms}):** raíz del promedio cuadrático del desplazamiento ponderado en el tiempo. Esta amplitud representa el promedio energético para cualquier señal senoidal o cosenoidal en un período, y está dada por: $A_{rms} = \frac{A_{máx}}{\sqrt{2}}$ (3)

Podemos observar estas amplitudes en la figura 5:

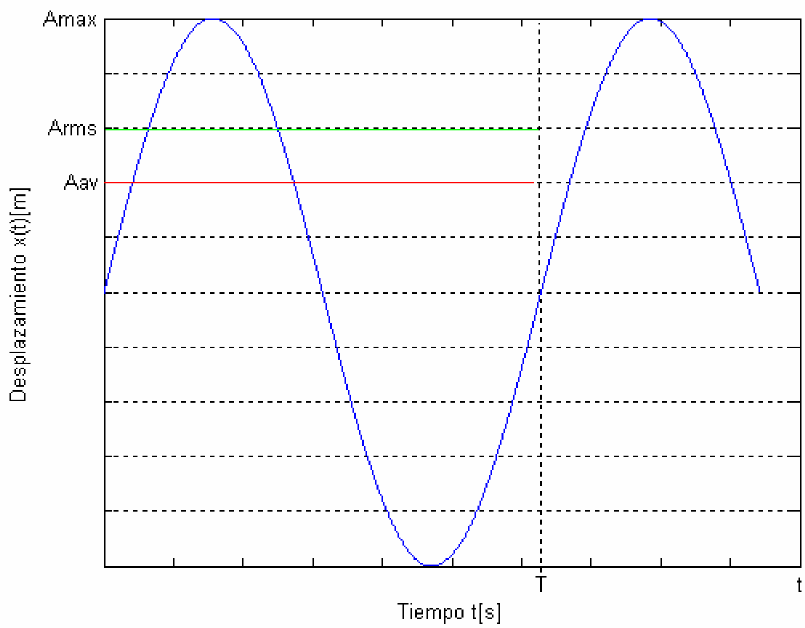


Figura 5

1.3 Trabajo y Energía

Trabajo:

En el estudió de la dinámica (estudio del movimiento y las fuerzas que lo generan) es conveniente definir alguna expresión que nos permita expresar la relación entre la fuerza que genera el movimiento de un objeto y la distancia que éste se desplaza, así surge el concepto de **trabajo** el cual está definido como la fuerza tangencial al movimiento provocado por ésta multiplicada por el desplazamiento, esto es:

$$T = F \bullet x \quad (4)$$

Donde el punto denota la operación vectorial "**producto punto"**, el cual representa la componente de la fuerza en dirección del movimiento como se ve en la figura 6:

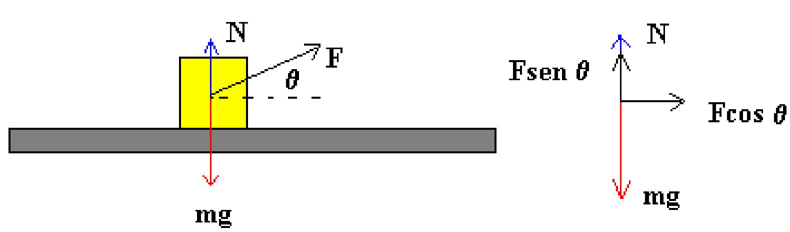


Figura 6

Así podemos expresar el trabajo como: $T = |F| \cdot |x| \cos(\theta)$ (5)

La unidad del trabajo es el Joule, donde podemos observar que $1 Joule = 1 Nm$.

Energía:

Cuando analizamos la dinámica de un cuerpo, es de interés saber hasta donde se moverá si es que está en movimiento, o cuánto avanzará si lo soltamos de cierta altura, o en el caso de un resorte comprimido saber hasta donde se moverá si lo soltamos. De aquí surge la necesidad de definir el concepto de energía, pues si un resorte se encuentra comprimido, sabemos que el cuerpo en el extremo de éste en un instante inicial se encuentra en reposo, pero al momento de soltarlo éste se moverá. Así definimos **energía** como la cantidad de movimiento que posee un sistema.
Otro punto muy importante de mencionar es el hecho de que la energía total que posee un sistema conservativo (energía cinética y potencial) es constante (sin fuerzas disipadoras de energía, como el roce), es decir, la energía total de un sistema se conservará y solamente habrá una transformación de de ésta (ley de conservación de la energía).

“La energía no se pierde ni se destruye, solo de transforma”

Podemos encontrar la energía en sus dos formas:

- **Energía cinética:** Cuando un cuerpo está en movimiento tiene la capacidad de efectuar trabajo, entonces tienen energía. Así la energía asociada al movimiento del cuerpo será definida como energía cinética. La energía cinética está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (6)$$

  Donde m es la masa del cuerpo y v es la velocidad de éste.

- **Energía potencial:** Cuando un cuerpo está en un punto determinado puede tener la capacidad de efectuar trabajo o comenzar a moverse, por ejemplo, un resorte comprimido, así podemos definir la energía potencial como la energía almacenada por el cuerpo y está asociada a su posición y entorno. En el caso de un sistema masa resorte, la energía potencial está dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad (7)$$

  Donde k es la constante elástica del resorte y x es la posición o desplazamiento de la partícula respecto a la posición de equilibrio.
  En el caso de un cuerpo situado a una cierta altura del suelo, la energía potencial está dada por:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \quad (8)$$

  Donde m es la masa, g es la aceleración de gravedad ($9.8 ms^{-2}$) y h es la altura del cuerpo.

- **Energía Total:** Es la energía total de un sistema, por lo tanto está dada por:

$$E_T = E_c + E_p \quad (9)$$

Energía en un oscilador armónico simple:

Consideremos el sistema masa-resorte de la figura 7:

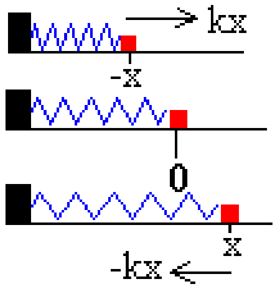


Figura 7

Sabemos que éste sistema se rige por la ecuación general del movimiento armónico simple por la ecuación (1):

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Por lo tanto la energía total de éste sistema está dado por:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad (10)$$

Si observamos la energía en el punto de equilibrio, esto es para x = 0, entonces la energía total está dada únicamente energía cinética, esto es:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2 \quad (11)$$

Donde v_0 es la velocidad máxima que alcanza el cuerpo.

Luego, como la energía total es constante, se cumple que en cualquier tiempo la energía total está dada por:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} m \cdot {v_0}^2 \quad (12)$$

Si observamos la energía en el de máximo desplazamiento, esto es para x =A, justo cuando la velocidad del cuerpo es cero, entonces la energía total está dada únicamente energía potencial, esto es:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + \frac{1}{2} k \cdot A^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \quad (13)$$

Luego, como la energía total es constante, se cumple que en cualquier tiempo la energía total está dada por:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \quad (14)$$

Si observamos, la energía total es constante, por lo que las expresiones (11) y (13) deben ser iguales, esto es:

$$E_T = \frac{1}{2}k \cdot A^2 = \frac{1}{2}m \cdot {v_0}^2 \quad (15)$$

Por lo tanto de esta expresión podemos obtener la velocidad máxima de desplazamiento en el punto de equilibrio x = 0, la cual está dada por:

$$v_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A \quad (16)$$

También podemos observar la ecuación (14) para determinar la velocidad como función del tiempo, esto es:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}k \cdot A^2$$

$$\Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{k \cdot A^2 - k \cdot x^2}{m} = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad (17)$$

Luego como el desplazamiento x está dado por la ecuación (1) $x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$, podemos reemplazarlo en (17) obteniendo así:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{(A^2 - x^2)} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{(A^2 - \left(A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)\right)^2)} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{(A^2 - A^2 \cdot Cos^2(\omega \cdot t + \varphi))}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2(1 - 1 \cdot Cos^2(\omega \cdot t + \varphi))} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} A\sqrt{(1 - 1 \cdot Cos^2(\omega \cdot t + \varphi))} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}} Sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\Rightarrow$$

$$v = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}} Sin(\omega \cdot t + \varphi) = \pm v_0 \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi)[\frac{m}{s}] \quad (18)$$

Donde $v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}$ es la amplitud máxima de velocidad.

Para determinar la función de aceleración debemos partir de la definición de fuerza, que en el caso del oscilador horizontal de la figura 7 está dada por la ley de Hooke, esto es:

$$F = -k \cdot x \quad (19)$$

Así, en el punto de máximo desplazamiento la fuerza total que ejerce el resorte está dada por:

$$F = -k \cdot A \quad (20)$$

Luego, como $F = m \cdot a$, tenemos que

$$F = -k \cdot x = m \cdot a \quad (21)$$

Entonces la aceleración del cuerpo en cualquier tiempo está dada por:

$$a = \frac{-k \cdot x}{m} \quad (22)$$

Así la aceleración máxima está dada para el desplazamiento máximo, esto es, x = A

$$a_{\max} = \frac{-k \cdot A}{m} \quad (23)$$

Si reemplazamos $x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$ en (22) tenemos que

$$a = \frac{-k \cdot x}{m} = \frac{-k \cdot A}{m} \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a = \frac{-k \cdot A}{m} \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (24)$$

En resumen, tenemos:

Desplazamiento [m]	$x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$	$x(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi)$
Velocidad [ms^{-1}]	$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$ o $v = -A\sqrt{\frac{k}{m}} Sin(\omega \cdot t + \varphi)$	$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$ o $v = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$
Aceleración [ms^{-2}]	$a = \frac{-k \cdot x}{m}$ o $a = \frac{-k \cdot A}{m} \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi)$	$a = \frac{-k \cdot x}{m}$ o $a = \frac{-k \cdot A}{m} \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Tabla 1

En la figura 8 se presentan los gráficos de energía potencial y cinética:

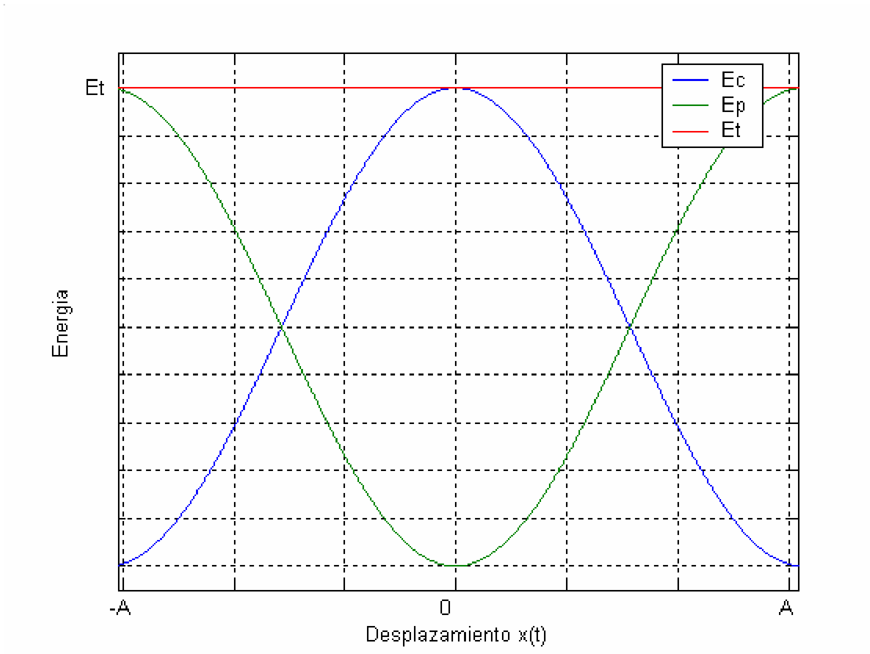


Figura 8

En la figura 9 se presentan los gráficos de desplazamiento, velocidad y aceleración:

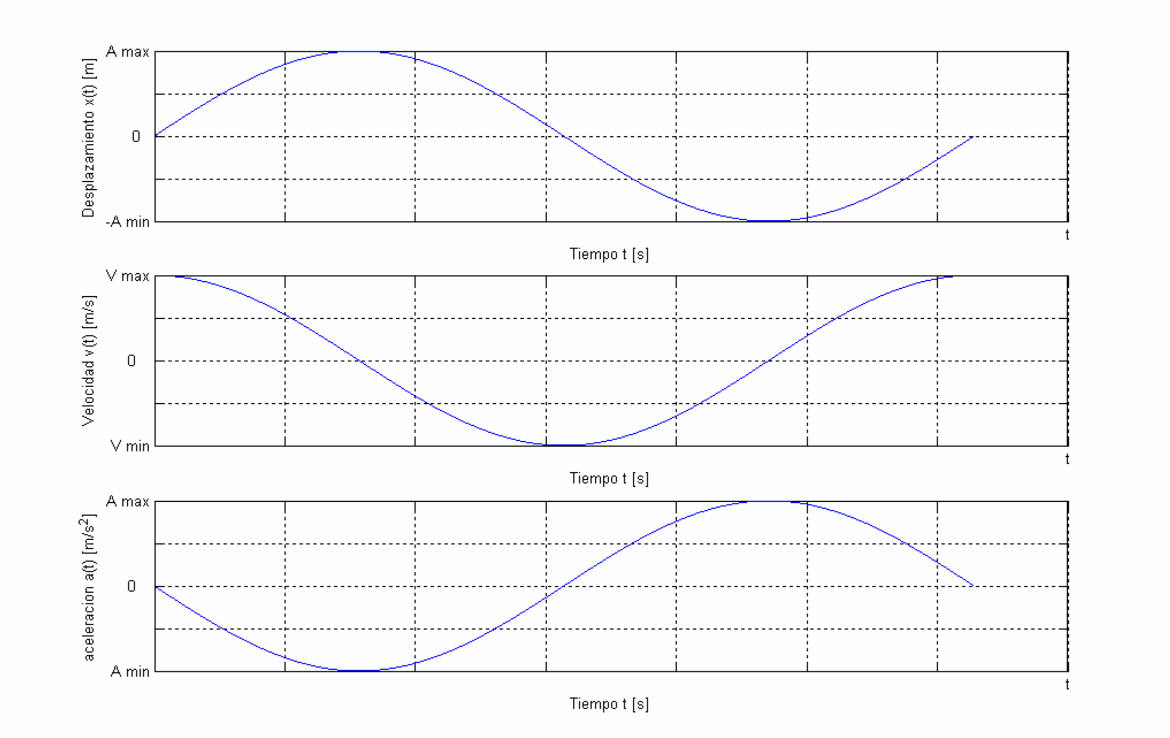


Figura 9

Energía en un oscilador armónico vertical

Consideremos la el sistema vertical mostrado en la figura 10:

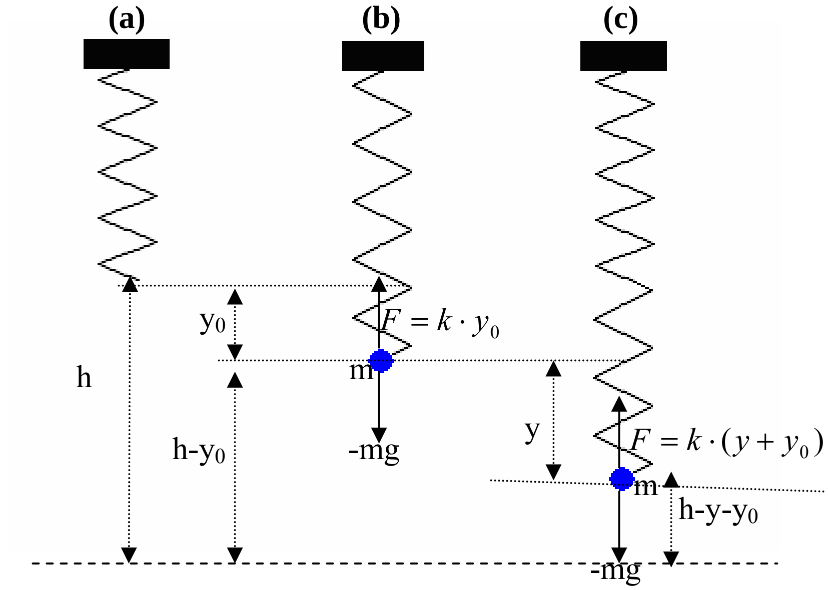


Figura 10

Si consideramos la figura 10 (a), podemos observar el resorte colgando verticalmente. Al agregarle una masa m, la fuerza de gravedad ($W = m \cdot g$) provocara un desplazamiento y_0, tal como se aprecia en la figura 10 (b), por lo tanto, la fuerza que ejerce el resorte es $F = ky_0$, la cual es positiva pues apunta hacia los y positivos. Al aplicarle a la masa un desplazamiento de magnitud y, como se aprecia en figura 10 (c), la fuerza ejercida por el resorte es $F = k(y + y_0)$, la cual es positiva pues apunta hacia los y positivos.

Para determinar al desplazamiento y_0 se debe considerar que cuando el sistema está en equilibrio (en y_0), la suma de todas las fuerzas debe ser cero, es decir, si observamos la figura 10 (b), debe cumplirse que:

$$ky_0 - mg = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$y_0 = \frac{mg}{k} \quad (25)$$

Donde:

- g: es la aceleración de gravedad, que en las cercanías de la superficie terrestre es de 9.8 ms^{-2}.
- m: es la masa del cuerpo.

De esta manera, si desplazamos la masa una distancia y de y_0, tal como se muestra en la figura 10 (c), la fuerza que ejerce el resorte está dada por:

$$F = k \cdot (y + y_0) - mg = k \cdot \left(y + \frac{mg}{k} \right) - mg = ky + mg - mg = ky$$

$$\Rightarrow$$

$$F = ky \quad (26)$$

De la ecuación (26) podemos ver que tanto el oscilador horizontal como el oscilador vertical se rigen por la ley de Hooke, y por tanto la oscilación del sistema vertical también es armónico simple.

De ésta manera, la energía cinética y potencial deben ser las mismas que en el caso del oscilador horizontal.

La energía cinética siempre es de la forma:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (27)$$

Donde:

- m: es la masa del cuerpo que cuelga.
- v: es la velocidad en el eje y del cuerpo.

Para la determinación de la energía potencial total respecto al punto de equilibrio debemos considerar la energía potencial en el punto y_0 y luego la energía potencial en el punto y, de tal manera que la energía potencial respecto al punto de equilibrio será la deferencia de la energía de ambos puntos, esto es:

Energía potencial en punto de equilibrio y_0:

En este punto tenemos la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica tal como se indica:

$$Ep_g = m \cdot g \cdot (h - y_0)$$

$$Ep_e = \frac{1}{2} k \cdot (y_0)^2$$

Así la energía potencial total será la suma de ambas energías potenciales, esto es:

$$E = m \cdot g \cdot (h - y_0) + \frac{1}{2} k \cdot (y_0)^2$$

Energía potencial en punto y:
En este punto tenemos la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica tal como se indica:

$$Ep_g = m \cdot g \cdot (h - y - y_0)$$

$$Ep_e = \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0 + y\right)^2$$

Así la energía potencial total será la suma de ambas energías potenciales, esto es:

$$E = m \cdot g \cdot (h - y - y_0) + \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0 + y\right)^2$$

Así la energía potencial respecto al punto de referencia está dada por la diferencia de ambos casos, esto es:

$$E = m \cdot g \cdot (h - y - y_0) + \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0 + y\right)^2 - m \cdot g \cdot (h - y_0) - \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0\right)^2$$

$$E = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot y - m \cdot g \cdot y_0 + \frac{1}{2} k \cdot \left(y^2{}_0 + 2 y y_0 + y^2\right) - m \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot y_0 - \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0\right)^2$$

$$E = -m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} k \cdot y^2{}_0 + k \cdot y \cdot y_0 + \frac{1}{2} k \cdot y^2 - \frac{1}{2} k \cdot \left(y_0\right)^2$$

$$Ademas$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

$$E = -m \cdot g \cdot y + k \cdot y \cdot y_0 + \frac{1}{2} k \cdot y^2 = -m \cdot g \cdot y + k \cdot y \cdot \frac{mg}{k}$$

$$E = \frac{1}{2} k \cdot y^2$$

Por lo tanto, la energía total del sistema respecto al punto de equilibrio es:

$$E_t = E_p + E_c$$

$$E_t = \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (29)$$

1.4 Círculo de Referencia

Consideremos una partícula de masa m que gira con velocidad constante v_0 por un círculo de radio A, tal como se muestra en l figura 11:

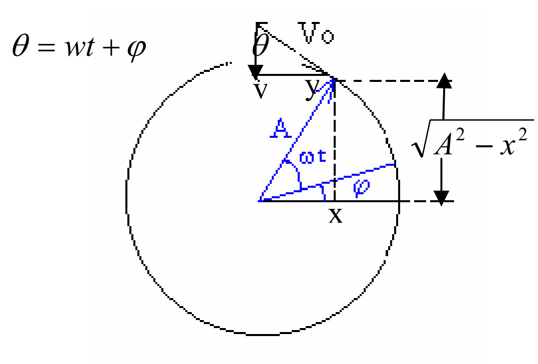


Figura 11

Para $t = 0$ la partícula tendrá una fase inicial φ. Si consideramos que el ángulo varía a una cierta velocidad angular constante ω, entonces la función del ángulo para cualquier tiempo está dada por:

$$\theta(t) = \varphi + \omega \cdot t \quad (30)$$

Donde:

- φ: es la fase inicial [rad].
- Ω: es la velocidad angular [rad/s]

Por lo tanto al completar una vuelta completa, en un tiempo T, debe cumplirse que $\theta - \varphi = 2\pi = \omega \cdot t$, por lo tanto:

$$w = \frac{2\pi}{T} \quad (31)$$

Entonces, si descomponemos la posición de la partícula en sus respectivos ejes x e y, tenemos que las coordenadas cartesianas son:

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (32)$$
$$y(t) = A \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (33)$$

Podemos entonces observar que en un movimiento circular las componentes x e y se mueven según la ecuación de un M.A.S.

Observando el triángulo, tenemos que la velocidad en ambos ejes puede ser obtenida la semejanza de los triángulos, esto es:

- En el triángulo inferior, $Cos(\theta) = \frac{x}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - y^2}}{A}$ y $Sin(\theta) = \frac{y}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$
- En el triángulo superior, $Cos(\theta) = \frac{v_y}{v_0}$ y $Sin(\theta) = \frac{v_x}{v_0}$

Por lo tanto, como el triángulo inferior y superior son semejantes, los cosenos y senos de ambos son los mismos, esto es:

$$Cos(\theta) = \frac{x}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - y^2}}{A} = \frac{v_y}{v_0}$$

$$Sin(\theta) = \frac{y}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} = \frac{v_x}{v_0}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$v_y = v_0 \frac{\sqrt{A^2 - y^2}}{A} = v_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} \quad (34)$$

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} = v_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (35)$$

Si reemplazamos (32) y (33) en (34) y (35) la velocidad de la partícula en sus respetivos ejes x e queda expresada como:

$$v_x(t) = -v_0 \cdot Sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (36)$$

$$v_y(t) = v_0 \cdot Cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (37)$$

Período en un M.A.S.

Como vimos, un movimiento circular está compuesto por un par de M.A.S., cada uno en su respectiva coordenada cartesiana.
Como ya definimos, el período es el tiempo necesario para que se complete un ciclo completo, por lo que si observamos los resultados obtenidos, el tiempo para que se complete un período completo de oscilación en cada eje es el mismo tiempo que se requiere para completar una vuelta completa en el círculo, así si el cuerpo se desplaza a velocidad constante v_0, el tiempo necesario para completar una vuelta está dado por:

$$T = \frac{perímetro}{v_0} = \frac{2\pi A}{v_0} \quad (38)$$

Pero sabemos que $v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}}$, por lo tanto

$$T = \frac{2\pi A}{A\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (39)$$

Ahora, usando la relación $f = \frac{1}{T}$, tenemos que la frecuencia natural de oscilación está dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (40)$$

Por último, usando la relación $w = \frac{2\pi}{T}$, tenemos que

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (41)$$

1.4 Movimiento Armónico Amortiguado

Cuando analizamos las oscilaciones de un sistema real podemos observar que éste disminuirá su amplitud de oscilación a medida que el tiempo transcurre, esto ocurre porque el sistema se encuentra interactuando en un medio (fluido) que disipa la energía a través de la fricción de las partículas que lo rodean (aire, agua,…, etc.). Estas fuerzas disipadoras pueden ser consideradas, para pequeñas amplitud de oscilación, proporcionales a la velocidad de la partícula, esto es de la forma:

$F_R = R_m \cdot v$ (42)

Donde:

- F_R: es la fuerza de roce, su unidad es el $[N]$
- R_m :es la constante del medio, su unidad es el $\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$
- v: es la velocidad de la partícula, cuya unidad es $\left[\frac{m}{s}\right]$

De esta manera podemos observar que si una partícula oscila con mayor velocidad, entonces mayor será la fuerza disipadora y por ende, será atenuada con mayor velocidad que una partícula que oscila a menor velocidad. Esto puede ser entendido de mejor manera, recordando que la amplitud máxima de velocidad para un M.A.S. está dada por:

$v_0 = \pm A \cdot w$ (43)

Donde $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$, es la velocidad angular de un M.A.S.

Por lo tanto si mayor es la frecuencia de oscilación de una partícula, mayor es su velocidad y por lo tanto, mayor la fuerza de roce. Esto explica el por qué los sonidos de alta frecuencia se atenúan mucho más rápido que los de frecuencia más bajas. Podemos apreciar el sistema en la figura 12:

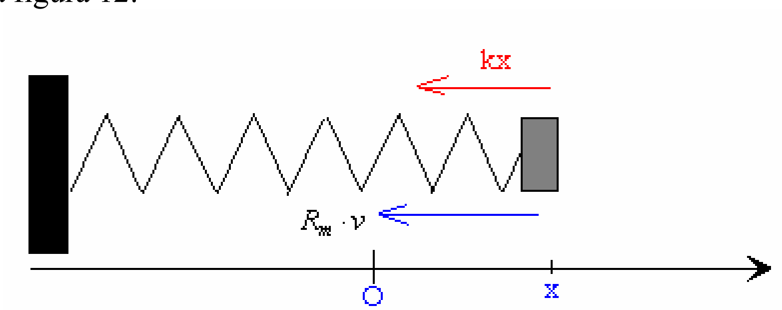


Figura 12

La ecuación que gobierna al movimiento amortiguado está dada por:

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta \cdot t} Cos(wt + \alpha) \text{ [m]} \quad (42)$$

Donde:

- A: es la amplitud inicial del movimiento, su unidad es el [m]
- β :es factor de amortiguamiento, y está dado por

$$\beta = \frac{R_m}{2 \cdot m}\left[\frac{1}{s}\right] (43)$$

- w: es la velocidad angular de oscilación, la cual depende tanto de las características del medio, está dada por:

$$w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2} \left[\frac{Rad}{s} \right] \quad (44)$$

$$\text{y } w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Cuándo analizamos ésta ecuación se pueden establecer tres tipos de amortiguamiento, los cuales tienen una naturaleza definida por las características del sistema, esto es, la masa y la constante de elasticidad así como la constante de roce.
A continuación se presentan los tres casos:

Oscilación débilmente amortiguada:

Este caso se presenta cuando el factor de amortiguamiento es mucho menor que la velocidad angular natural del sistema, esto es $w_0 >> \beta$. Cuando esto ocurre, la frecuencia de oscilación del sistema prácticamente es igual a la frecuencia natural de oscilación, por lo que $w = \sqrt{w_0^2 - \beta^2} \approx w_0$. Además cuando esto ocurre, el implica que el factor de amortiguamiento $\beta \approx 0$, lo que implica que la atenuación en el tiempo será muy pequeña, debido a la baja resistencia del medio R_m, tal como se observa en la figura 13:

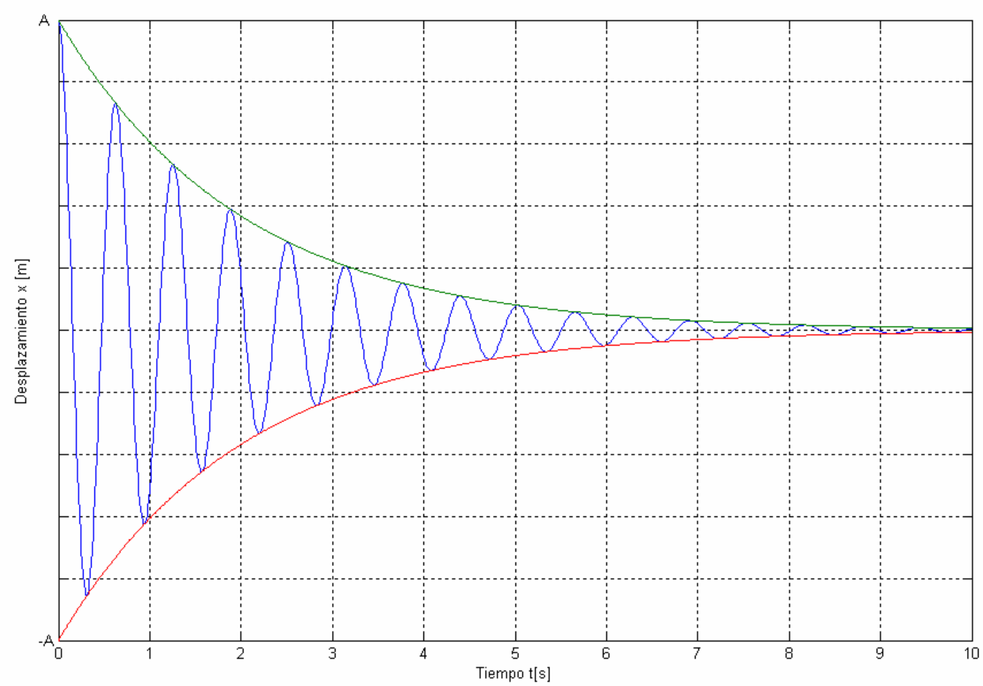


Figura 13

Oscilación críticamente amortiguada

Este caso de presenta cuando el factor de amortiguamiento es muy similar a la velocidad angular natural del sistema, esto significa que $w_0 \approx \beta$, por lo que la frecuencia de oscilación del sistema será muy baja, y el factor de amortiguamiento tendrá un factor preponderante en la oscilación del sistema, tal como se aprecia en la figura 14:

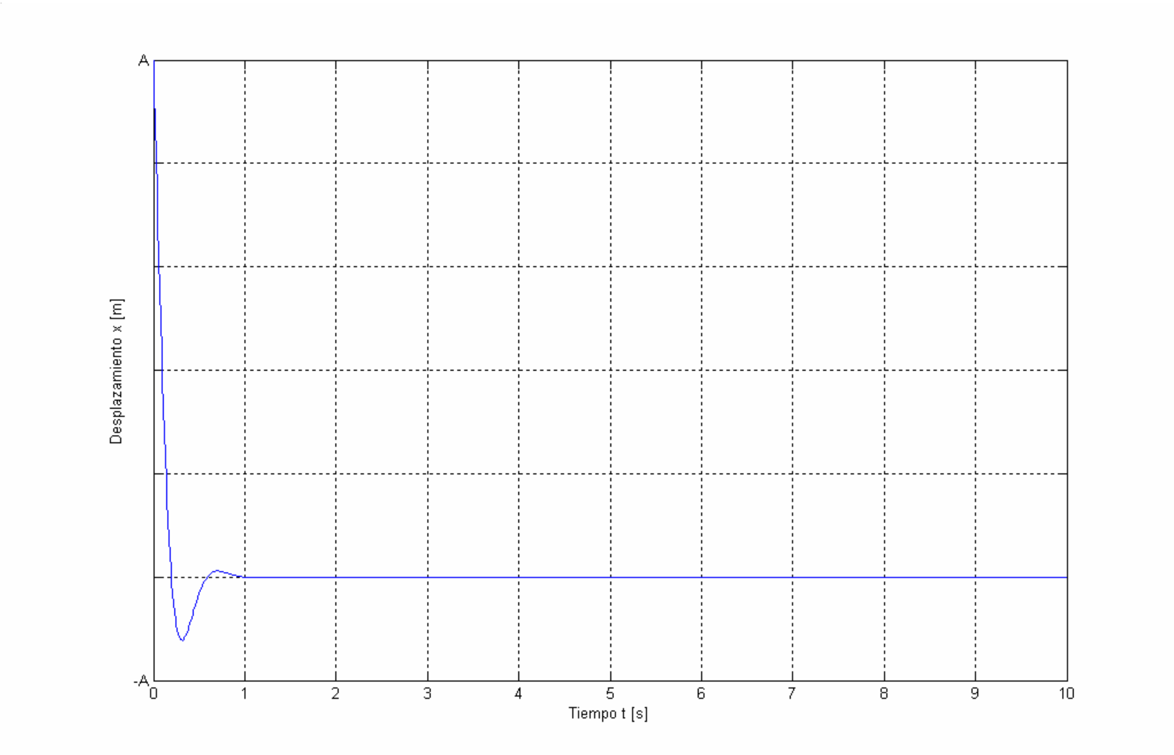


Figura 14

Oscilación sobre amortiguada:

Este caso ocurre cuando el factor de amortiguamiento es mayor o igual a la velocidad angular natural de oscilación, esto significa que $w_0 \leq \beta$, lo que implica que la frecuencia de oscilación del sistema pertenecerá a los números complejos, lo que realmente significa que la partícula no alcanzará a oscilar y simplemente retornará al punto de equilibrio directamente. Esto se debe a que la fuerza disipadora es tan grande que no permite que el sistema oscile, por lo que éste retorna al punto de equilibrio sin oscilar tal como se aprecia en la figura 15:

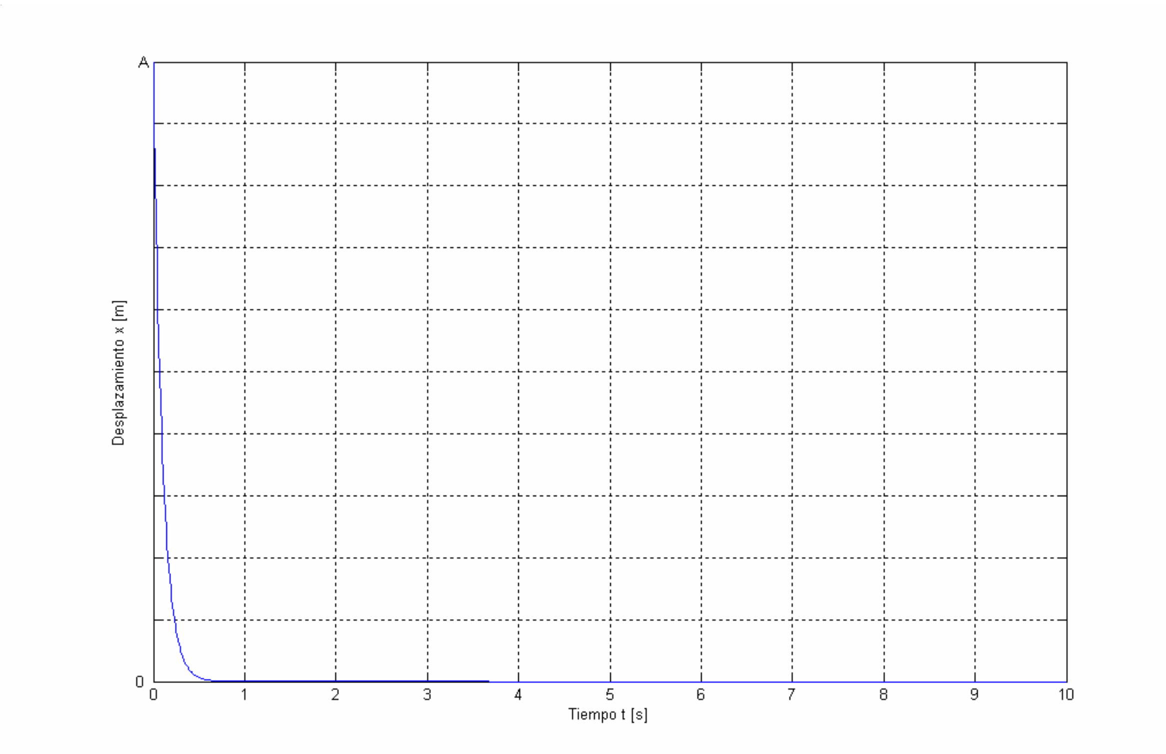


Figura 15

1.5 Vibraciones Forzadas

En general, un sistema entra en vibración cuando es perturbado por alguna fuerza, de tal manera que éste responderá a la fuerza de excitación. En un movimiento armónico amortiguado, podemos considerar que la fuerza externa de excitación será de la forma:

$$F(t) = F_0 \cdot Cos(w_f \cdot t) \quad (45)$$

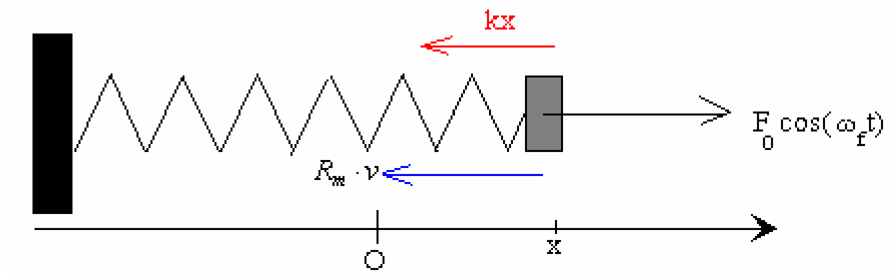


Figura 16

Cuando analizamos este tipo de problemas podemos esperar que el sistema se mueva acorde a la fuerza de excitación debido a que ésta es la fuerza que induce el movimiento, así también es de esperar que si el sistema tiene una frecuencia natural de oscilación, entonces para esa frecuencia el sistema vibrará con mayor facilidad. Esto es así, y para su mejor comprensión resulta útil observar la solución del movimiento armónico forzado, que está dada por:

$$x(t) = A \cdot Cos(\omega_f \cdot t + \varphi) \quad (46)$$

Donde

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(w_f^2 - w_0^2\right)^2 + 4 \cdot w_f^2 \beta^2}} \quad (47)$$

Donde:

- F_0 : es la amplitud de la fuerza de excitación en [N]
- w_f : es la velocidad angular de la fuerza de excitación en $\left[\frac{Rad}{s}\right]$
- w_o : es la velocidad angular natural del sistema en $\left[\frac{Rad}{s}\right]$
- m: es la masa de la partícula en [Kg]
- β : es el factor de amortiguamiento en $\left[\frac{1}{s}\right]$

Podemos observar que ahora la amplitud de oscilación A depende de la frecuencia de la fuerza externa, de tal manera que su amplitud será máxima cuando la frecuencia de la fuerza externa sea igual a la frecuencia natural del sistema, cuando esto ocurre, decimos que el sistema está en Resonancia, y es aquí cuando la transferencia de energía de la fuerza externa es máxima, por lo que la amplitud es máxima.

En la figura 17 se muestra la dependencia de frecuencia de la amplitud:

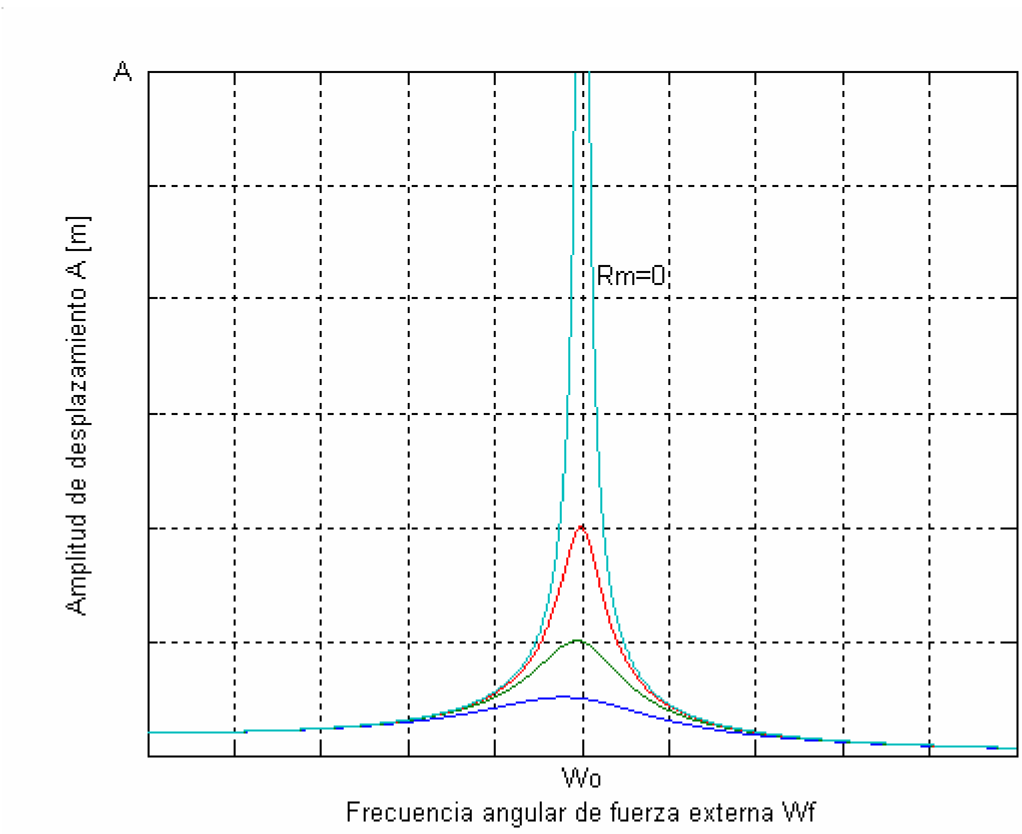


Figura 17

En la figura 17 podemos apreciar que para los distintos valores de la resistencia del medio, la máxima amplitud es entorno a la frecuencia de resonancia w_o, así como también podemos notar que mientras más pequeño es el valor de la resistencia del medio, más estrecha es la zona de resonancia, mientras que a medida que aumenta la resistencia del medio, mayor es la zona de resonancia.

Para cuantificar este efecto, se define el factor de calidad Q como:

$$Q = \frac{w_0 \cdot m}{R_m} \text{ [Adimensional] (48)}$$

o también como:

$$Q = \frac{f_o}{f_2 - f_1} \text{ [Adimensional] (49)}$$

Donde:

- f_0: es la frecuencia natural o de resonancia del sistema, dada por $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
- $f_2 - f_1 = \Delta f$: corresponde al ancho de media altura de $x(t)$, el cual se muestra en la figura 18:

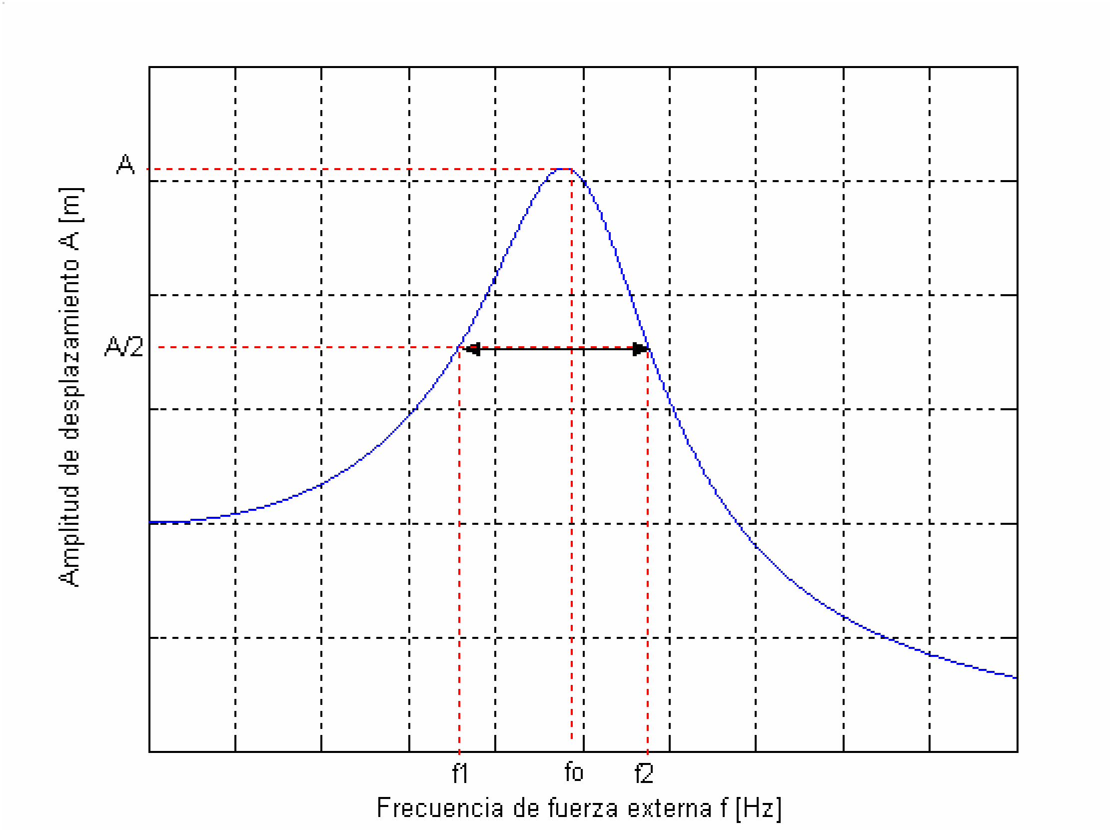


Figura 18

1.6 Principio de Superposición e Interferencia de Ondas

Cuando una partícula está sometida a más de una fuerza armónica, cada una intentando mover a la partícula en su propia dirección con M.A.S., decimos que existe una interferencia de movimientos armónicos simples.

Para entender esto es útil considerar la representación vectorial de dos más, tal como se muestra en la figura 19:

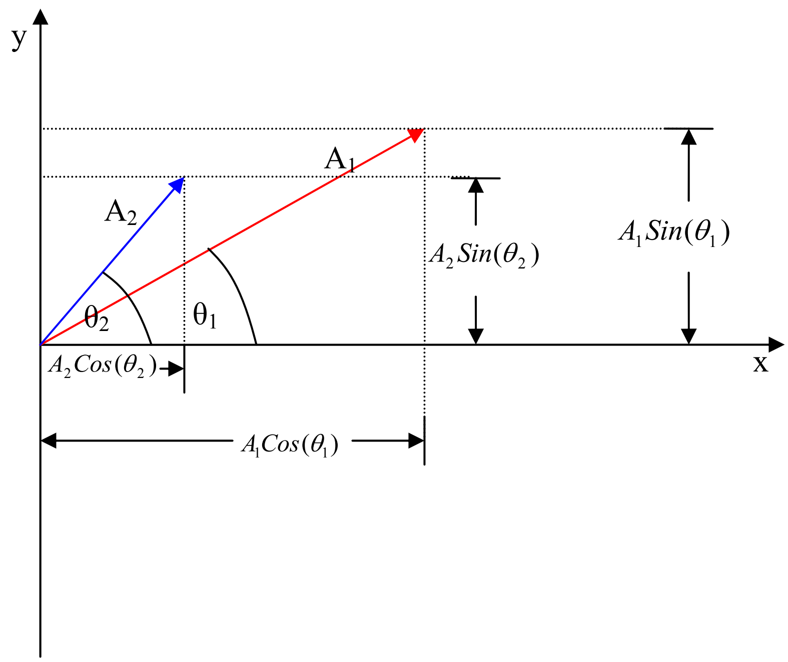


Figura 19

Donde:

- A_1: es la amplitud del M.A.S. número uno.
- θ_1: es la fase del M.A.S. número uno en función del tiempo dada por:
  $\theta_1 = w_1 \cdot t + \varphi_1$
- A_2: es la amplitud del M.A.S. número dos.
- θ_2: es la fase del M.A.S. número dos en función del tiempo dada por:
  $\theta_2 = w_2 \cdot t + \varphi_2$
- w_1, w_2, φ_1 y φ_2: son las respectivas velocidades angulares y fases iniciales de cada M.A.S.

Si consideramos que la superposición de dos M.A.S es la suma de ellos, tenemos que el movimiento de una partícula que se mueve debido a estos M.A.S. está dada por:

$$x(t) = A_1 Cos(\theta_1) + A_2 Cos(\theta_2)$$
$$ó \qquad (50)$$
$$x(t) = A_1 Cos(w_1 t + \varphi_1) + A_2 Cos(w_2 t + \varphi_2)$$

Sin embargo, está expresión no nos permite observar de manera explícita la amplitud ni la fase del M.A.S. resultante, por lo que convenientemente ésta misma suma, la obtendremos al sumar los vectores de la figura 19, cuya suma vectorial corresponde simplemente a la suma de las componentes en x e y da cada vector, tal como se presenta a continuación:

Componente x e y de vector de amplitud A_1:

- $x = A_1 Cos(\theta_1)$
- $y = A_1 Sin(\theta_1)$

Componente x e y de vector de amplitud A_2:

- $x = A_2 Cos(\theta_2)$
- $y = A_2 Sin(\theta_2)$

Entonces las componentes x e y del vector resultante de la superposición está dado por:

- $x = A_1 Cos(\theta_1) + A_2 Cos(\theta_2)$ (51)
- $y = A_1 Sin(\theta_1) + A_2 Sin(\theta_2)$ (52)

Por lo tanto la amplitud A del vector resultante está dado por:

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$A = \sqrt{\left(A_1 Cos(\theta_1) + A_2 Cos(\theta_2)\right)^2 + \left(A_1 Sin(\theta_1) + A_2 Sin(\theta_2)\right)^2}$$
$$A = \sqrt{A_1^2 Cos^2(\theta_1) + 2A_1A_2 Cos(\theta_1)Cos(\theta_2) + A_2^2 Cos^2(\theta_2) + A_1^2 Sin^2(\theta_1) + 2A_1A_2 Sin(\theta_1)Sin(\theta_2) + A_2^2 Sin^2(\theta_2)}$$

Además, recordando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ obtenemos:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(Cos(\theta_1)Cos(\theta_2) + Sin(\theta_1)Sin(\theta_2)\right)}$$

Y por último, recordando la propiedad $Cos(x - y) = Cos(x) \cdot Cos(y) + Sin(x) \cdot Sin(y)$, tenemos que:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 Cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (53)$$

ó

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2Cos(w_1t-\varphi_1-(w_2t-\varphi_2)}$$

ó

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2Cos\big(t(w_1-w_2)-(\varphi_1-\varphi_2)\big)} \quad (54)$$

La ecuación (54) muestra la amplitud de la superposición de dos M.A.S.

Para obtener la fase resultante, basta con recordar que:

$$Tan(\theta)=\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow$$

$$Tan(\theta)=\frac{A_1Sin(\theta_1)+A_2Sin(\theta_2)}{A_1Cos(\theta_1)+A_2Cos(\theta_2)}$$

ó

$$Tan(\theta)=\frac{A_1Sin(w_1t+\varphi_1)+A_2Sin(w_2t+\varphi_2)}{A_1Cos(w_1t+\varphi_1)+A_2Cos(w_2t+\varphi_2)} \quad (55)$$

De tal manera que

$$\theta=\arctan\left(\frac{A_1Sin(w_1t+\varphi_1)+A_2Sin(w_2t+\varphi_2)}{A_1Cos(w_1t+\varphi_1)+A_2Cos(w_2t+\varphi_2)}\right)(56)$$

Casos Particulares:

A continuación, analizaremos la superposición de dos M.A.S. considerando que:

- La velocidad angular de ambos M.A.S. es la misma, es decir, $w_1=w_2=w$
- Ambos vectores girarán en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Para este caso, la primera consideración importante es que la suma resultante de este movimiento, dado por la ecuación (54):

$$x(t)=A_1Cos(\theta_1)+A_2Cos(\theta_2)$$

Donde:

- $\theta_1=wt+\varphi_2$
- $\theta_2=wt+\varphi_2$

Esto puede quedar expresado de la forma:

$$x(t) = ACos(wt + \varphi) \quad (57)$$

Esto se puede observar aplicando la propiedad trigonométrica:
$Cos(x + y) = Cos(x) \cdot Cos(y) - Sin(x) \cdot Sin(y)$

De tal manera que:

$x(t) = A_1Cos(\theta_1) + A_2Cos(\theta_2) = ACos(wt + \varphi)$

$x(t) = A_1Cos(wt + \varphi_1) + A_2Cos(wt + \varphi_2) = A\left(Cos(wt)Cos(\varphi) - Sin(wt)Sin(\varphi))\right)$

Por lo tanto

$x(t) = A_1Cos(wt)Cos(\varphi_1) - A_1Sin(wt)Sin(\varphi_1) + A_2Cos(wt)Cos(\varphi_2) - A_2Sin(wt)Sin(\varphi_2) = ACos(wt)Cos(\varphi) - ASin(wt)Sin(\varphi)$

$\Rightarrow$

$x(t) = \left(A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2)\right)Cos(wt) - \left(A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2)\right)Sin(wt) = ACos(wt)Cos(\varphi) - ASin(wt)Sin(\varphi)$

Por lo tanto se debe cumplir que :

$A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2) = ACos(\varphi)$ (58)

$A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2) = ASin(\varphi)$ (59)

Si elevamos al cuadrado ambas expresiones y las sumamos obtenemos :

$\left(A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2)\right)^2 + \left(A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2)\right)^2 = \left(ACos(\varphi)\right)^2 + \left(ASin(\varphi)\right)^2$

$A_1^2Cos^2(\varphi_1) + 2A_1A_2Cos(\varphi_1)Cos(\varphi_2) + A_2^2Cos^2(\varphi_2) + A_1^2Sin^2(\varphi_1) + 2A_1A_2Sin(\varphi_1)Sin(\varphi_2) + A_2^2Sin^2(\varphi_2) = A^2$

$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(Cos(\varphi_1)Cos(\varphi_2) + Sin(\varphi_1)Sin(\varphi_2)\right) = A^2$

$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_1 - \varphi_2) = A^2$

ó

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ (60)

Si dividimos la ecuación (59) por la (58) obtenemos que :

$$\frac{A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2)}{A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2)} = \frac{ASin(\varphi)}{ACos(\varphi)}$$

Por lo que :

$$\mathrm{Tan}(\varphi) = \frac{A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2)}{A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2)} \quad (61)$$

ó

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_1Sin(\varphi_1) + A_2Sin(\varphi_2)}{A_1Cos(\varphi_1) + A_2Cos(\varphi_2)}\right) \quad (62)$$

En resumen, podemos expresar la superposición de dos M.A.S. con igual velocidad angular como:

$$x(t) = A_1 Cos(\theta_1) + A_2 Cos(\theta_2) = ACos(wt + \varphi)$$

Donde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 Cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \arctan(\frac{A_1 Sin(\varphi_1) + A_2 Sin(\varphi_2)}{A_1 Cos(\varphi_1) + A_2 Cos(\varphi_2)})$$

Donde:

- $\theta_1 = wt + \varphi_2$
- $\theta_2 = wt + \varphi_2$

De manera general, podemos extender este principio para la superposición de N M.A.S. de igual velocidad angular como:

$$x_1(t) = A_1 Cos(wt + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 Cos(wt + \varphi_2)$$
$$x_3(t) = A_3 Cos(wt + \varphi_3)$$
$$\vdots$$
$$x_N(t) = A_N Cos(wt + \varphi_N)$$
$$\Rightarrow$$
$$x(t) = A_1 CosN(wt + \varphi_1) + A_2 Cos(wt + \varphi_2) + A_3 Cos(wt + \varphi_3) + \ldots + A_N Cos(wt + \varphi_N)$$
$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n Cos(wt + \varphi_n) = A\cos(wt + \varphi)$$

Donde la amplitud del movimiento resultante está dada por:

$$A = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{N} A_n Cos(\varphi_n)\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{N} A_N Sin(\varphi_n)\right)^2} \quad (63)$$

y la fase resultante está dada por:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} A_N Sin(\varphi_n)}{\sum_{n=1}^{N} A_n Cos(\varphi_n)}\right) \quad (64)$$

Interferencias Constructivas:

Supongamos que se realiza la superposición de dos M.A.S. con igual velocidad angular y la misma fase inicial, es decir:

$$x(t) = A_1 Cos(wt + \varphi_1) + A_2 Cos(wt + \varphi_1) \quad (65)$$

Entonces aplicando la ecuación (60) tenemos que:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\varphi_1 - \varphi_1)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(0)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

Es decir, la amplitud total corresponde a la suma de ambas amplitudes, por lo que en este caso la superposición tiene la mayor amplitud posible, por esto se le da el nombre de superposición o interferencia constructiva. Como la diferencia de fase es la misma, la resultante tendrá la misma fase que las señales. Podemos apreciar este caso en la figura 20:

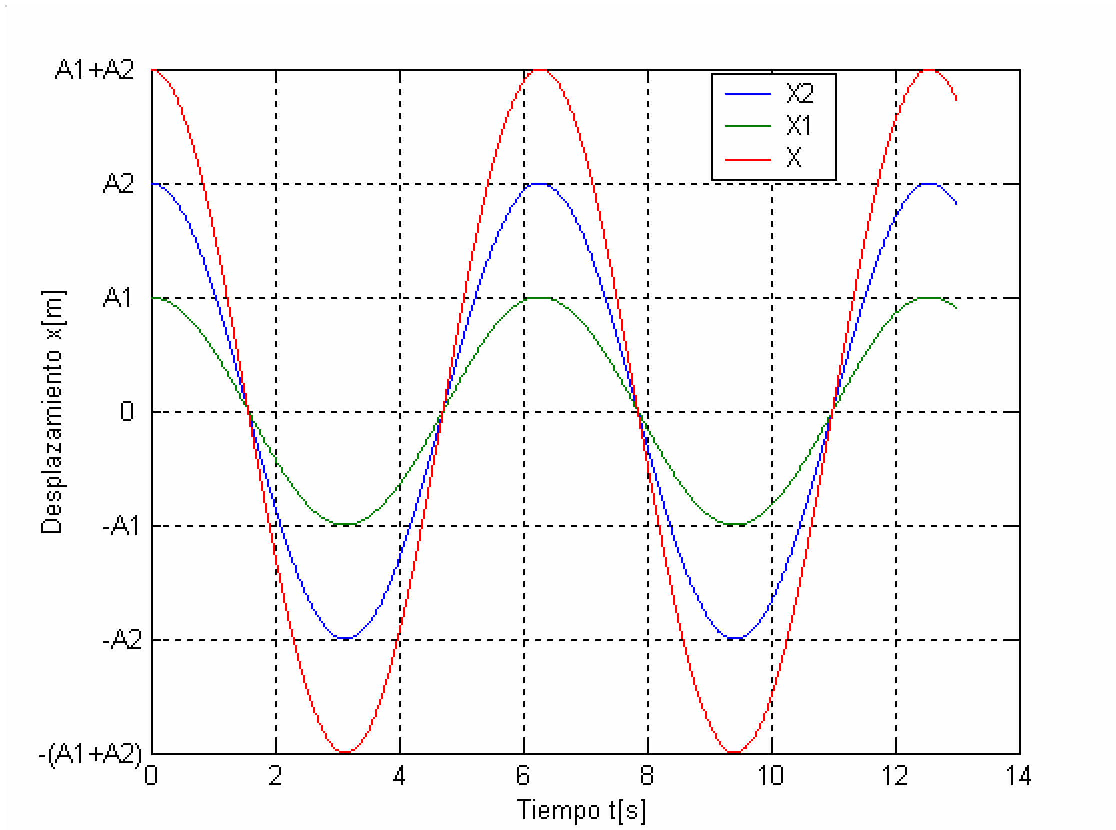


Figura 20

Interferencia Destructiva

Supongamos que se realiza la superposición de dos M.A.S. con igual velocidad angular, pero con un desfase de π rad, es decir:

$$x(t) = A_1 Cos(wt + \varphi_1 + \pi) + A_2 Cos(wt + \varphi_1) \quad (65)$$

Entonces aplicando la ecuación (60) tenemos que:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 Cos(\varphi_1 + \pi - \varphi_1)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 Cos(\pi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2} = A_1 - A_2$$

Es decir, la amplitud total corresponde a la resta de ambas amplitudes, por lo que en este caso la superposición tiene la menor amplitud posible, por esto se le da el nombre de superposición o interferencia destructiva. Podemos apreciar este caso en la figura 21:

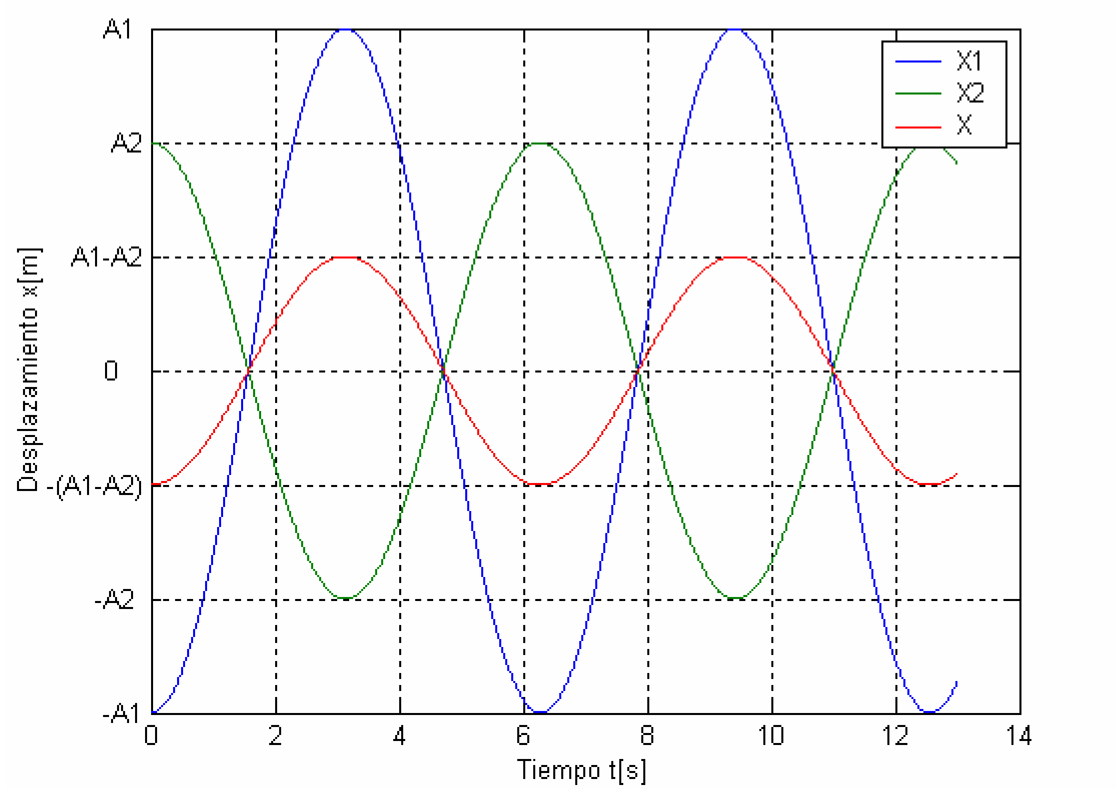


Figura 21

1.7 Superposición de dos M.A.S. con la misma dirección pero diferente frecuencia

En el punto anterior analizamos la superposición de dos M.A.S. con la misma velocidad o frecuencia angular para observar los distintos casos de interferencia. Ahora estudiaremos el caso en que la superposición tiene la misma dirección, pero ahora con diferente frecuencia. Este es el tipo de interferencia que resulta cuando dos señales de radio son transmitidas con frecuencias cercanas, pero no iguales. También es el caso que se da cuando las cuerdas de una guitarra, bajo o cualquier instrumento de cuerda generan sonidos de frecuencias muy cercanas o el caso que se da cuando escuchamos sonidos a intervalos de semitonos.

Consideremos dos M.A.S. descritos por las ecuaciones:

$x_1(t) = A_1 Cos(w_1 t)$

$x_2(t) = A_2 Cos(w_2 t)$

Para las cuales hemos supuesto por simplicidad las fases iniciales igual a cero. Entonces la función resultante de la superposición está dada por:

$x(t) = A_1 Cos(w_1 t) + A_2 Cos(w_2 t)$ (66)

De la ecuación (54) sabemos que:

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 Cos\left(t(w_1 - w_2)\right)}$

Donde la amplitud A oscilará entre los valores $A = A_1 + A_2$ y $A = \left|A_1 - A_2\right|$. Se dice entonces que la amplitud está **modulada**, ya que el valor de ésta depende de la diferencia de fase $\Delta\theta = (w_1 - w_2)$.

La frecuencia angular de la oscilación de la amplitud está dada entonces por:

$$w = \left|w_1 - w_2\right| \quad (67)$$

y su correspondiente frecuencia por:

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{\left|w_1 - w_2\right|}{2\pi} = \left|\frac{w_1}{2\pi} - \frac{w_2}{2\pi}\right|$$

$$\Rightarrow$$

$$f = \left|f_1 - f_2\right| \quad (68)$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación de la amplitud corresponde a la diferencia de las frecuencias de los movimientos armónicos en interferencia.

Podemos observar el comportamiento de la amplitud en la figura 22:

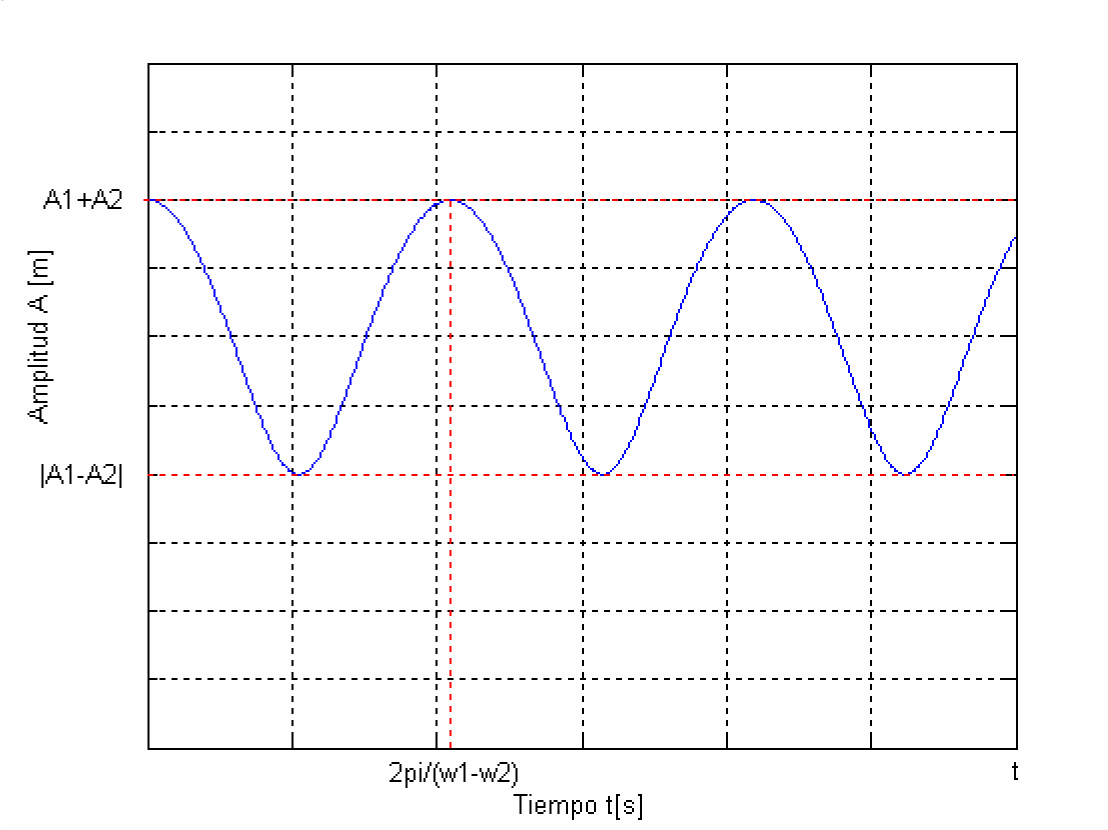


Figura 22

Este fenómeno es conocido como **Pulsación** debido que corresponde a una amplitud que varia de forma periódica a medida que el tiempo transcurre. Por ejemplo, cuando dos fuentes de sonido de frecuencias muy cercanas pero diferentes vibran simultáneamente en lugares cercanos, el oyente notará una fluctuación en la intensidad del sonido, esta fluctuación se debe al cambio de amplitud de la superposición.

Podemos observar el movimiento resultante de la superposición en la figura 23:

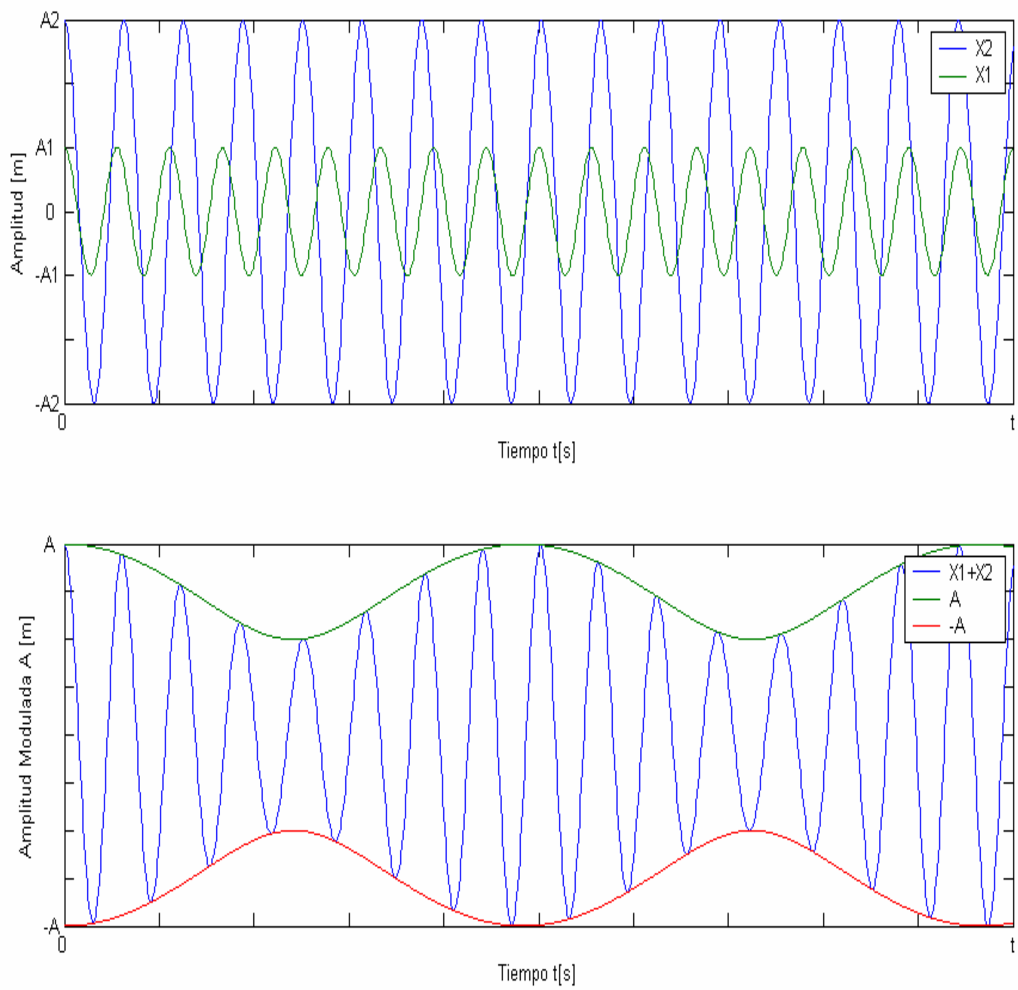


Figura 23

Cuando las amplitudes de los M.A.S que se superponen son iguales, es decir, $A_1 = A_2$ entonces la amplitud del movimiento resultante de la superposición está dada por:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_1Cos\left(t(w_1 - w_2)\right)} = \mathrm{A}_1\sqrt{2\left(1 + Cos\left(t(w_1 - w_2)\right)\right)}$$

y aplicando la propiedad trigonométrica :

$$Cos^2(\theta) = \frac{Cos(2\theta) + 1}{2} \Rightarrow Cos(2\theta) + 1 = 2Cos^2(\theta)$$

Lo que implica que para $\theta = \frac{\alpha}{2}$, obtenemos

$$Cos(\alpha) + 1 = 2Cos^2(\frac{\alpha}{2})$$

Entonces obtenemos que:

$$A = \mathrm{A}_1\sqrt{2(1+Cos(t(w_1 - w_2)))} = \mathrm{A}_1\sqrt{2\left(2\cdot Cos^2\left(t\frac{(w_1-w_2)}{2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \qquad (69)$$

$$A = 2\mathrm{A}_1 Cos\left(\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t\right)$$

Esto significa que la amplitud de la superposición varía entre cero y $2A_1$, tal como se observa en la figura 24:

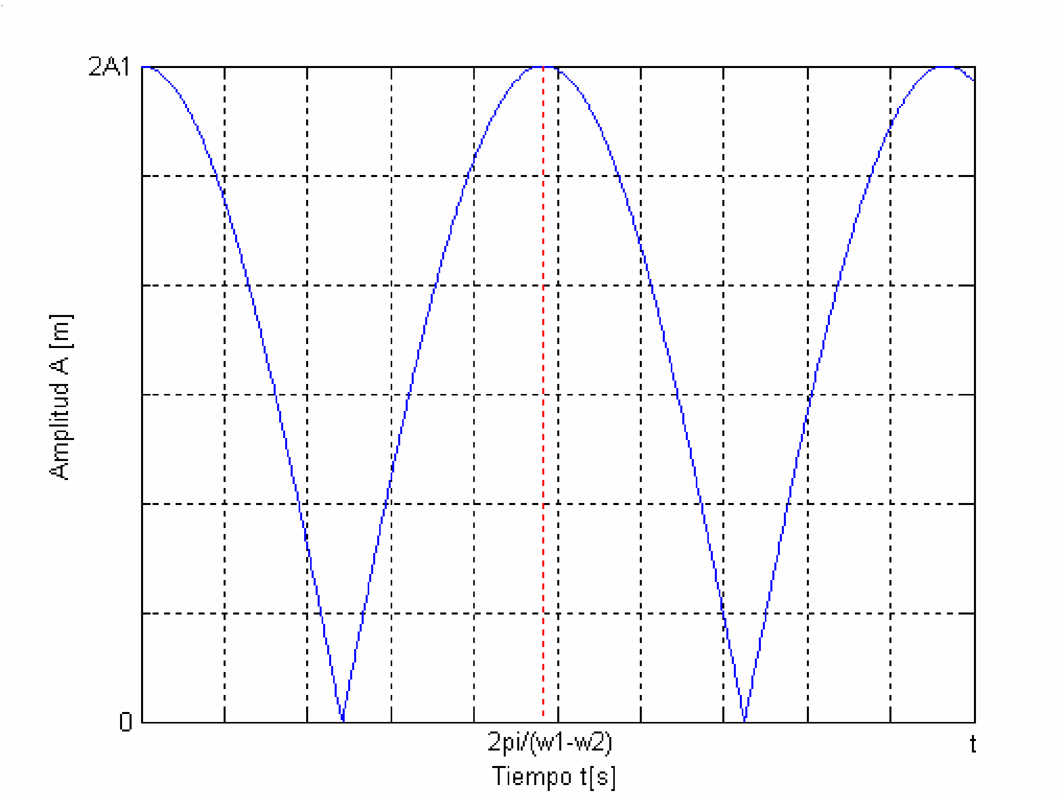


Figura 24

Para este caso, la ecuación del movimiento resultante queda dada por:

$$x(t) = A_1 Cos(w_1 t) + A_1 Cos(w_2 t) \quad (70)$$

que al aplicarle la propiedad trigonométrica:

$$Cos(x+y) + Cos(x-y) = 2Cos(x)\cdot Cos(y)$$

obtenemos

$$x(t) = 2\mathrm{A}_1 Cos\left(\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t\right)\cdot Cos\left(\frac{1}{2}(w1+w2)\cdot t\right)$$

$$x(t) = A\cdot Cos\left(\frac{1}{2}(w1+w2)\cdot t\right) \qquad (71)$$

Por lo tanto el movimiento se puede interpretar como un movimiento armónico simple de amplitud A dada por la ecuación (69), y con frecuencia angular de oscilación dada por

$$w = \frac{1}{2}(w1 + w2) \quad (72)$$

Entonces la frecuencia está dada por:

$$w = \frac{1}{2}(w1 + w2) \Rightarrow 2\pi f = \frac{1}{2}(2\pi f_1 + 2\pi f_2)$$

$$\Rightarrow \qquad (73)$$

$$f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

Esta frecuencia es conocida como la **frecuencia de la señal portadora**.

Podemos observar esto en la figura 25:

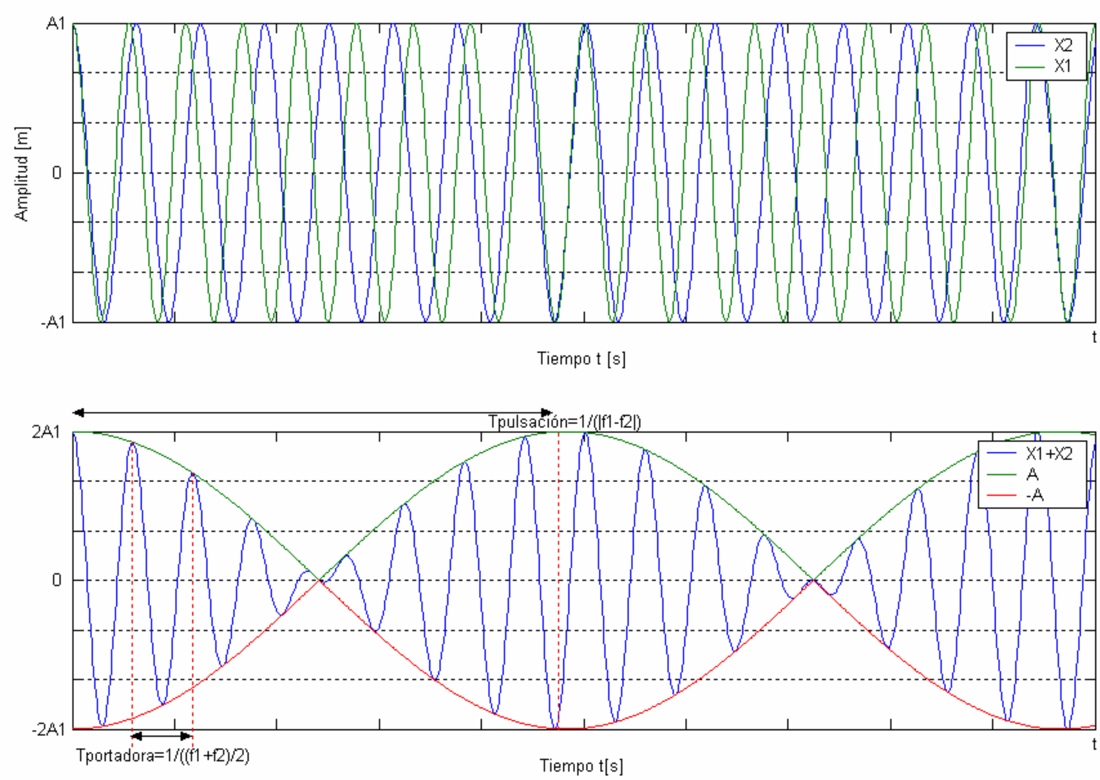


Figura 25

1.8 Señales Complejas

Los sonidos que encontramos en la naturaleza rara vez son tonos puros. En general los sonidos que encontramos son sonidos complejos que se caracterizan por estar compuestos por un conjunto de tonos que pueden o no estar relacionados entre si y determinan su timbre en particular. Cuando decimos que existe una relación directa entre los tonos que conforman un timbre nos referimos a aquellos sonidos en que existe una relación directa entre la frecuencia más baja, conocida como frecuencia fundamental y las frecuencias superiores, conocidas como armónicos, las cuales son múltiplos de la frecuencia fundamental.

Cuando analizamos señales de cualquier tipo, sean estas eléctricas, vibraciones mecánicas, vibraciones acústicas, etc. Es muy importante observar el comportamiento de éstas tanto en el tiempo (cuando analizamos una señal en el tiempo decimos que estamos en el dominio del tiempo) como sus componentes y comportamiento en la frecuencia (cuando analizamos el comportamiento de las frecuencias que componen un sonido decimos que estamos en el dominio de la frecuencia).

Por ejemplo, podemos observemos una señal senoidal en el dominio del tiempo y la frecuencia, tal como se muestra en la figura 26:

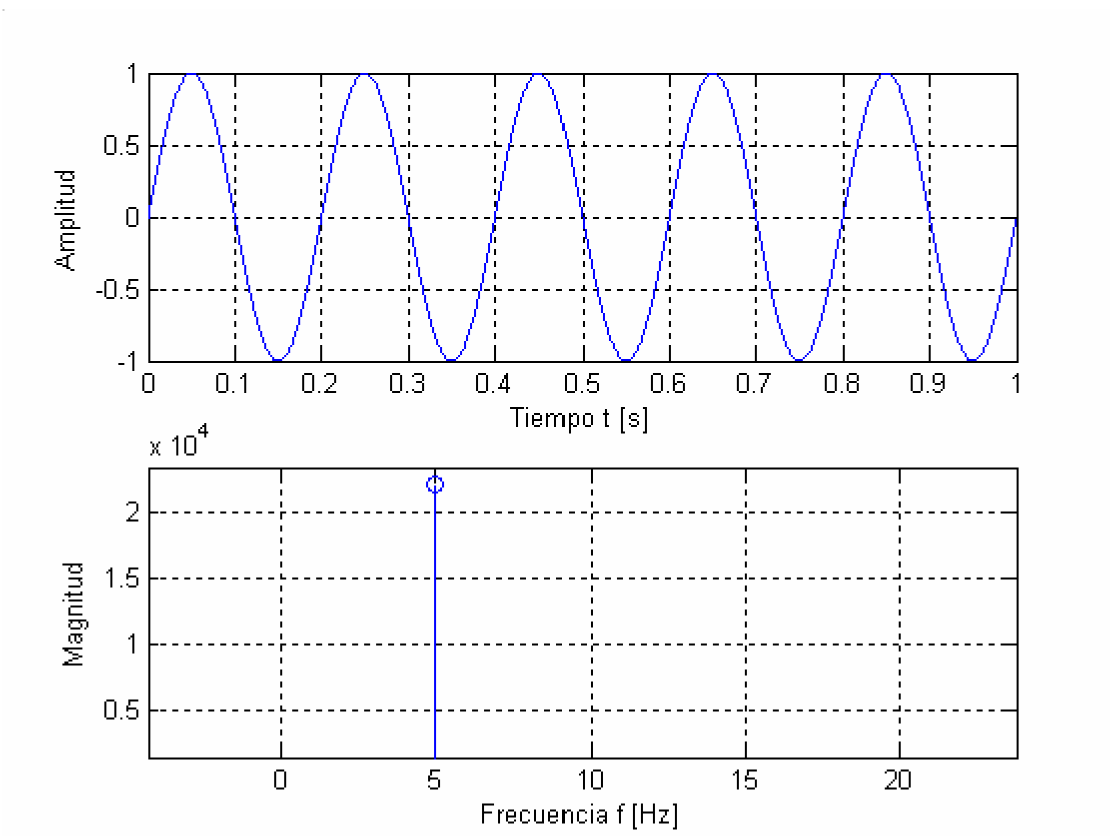


Figura 26

Para el caso observado en la figura 26, el tono es de 5Hz, por lo que tiene una única componente de frecuencia en 5Hz tal como se aprecia en el segundo gráfico.

Cuando analizamos las componentes de frecuencia de una señal, decimos entonces que estamos realizando un análisis espectral de la señal y llamaremos componentes espectrales de la señal a las diferentes frecuencias observadas. En general, la visualización del espectro de una señal es conocida como espectro de la señal, y cuando observamos además el comportamiento espectral en el tiempo de una señal, entonces hablamos del espectrograma o espectrografía de la señal, tal como se observa en la figura 27:

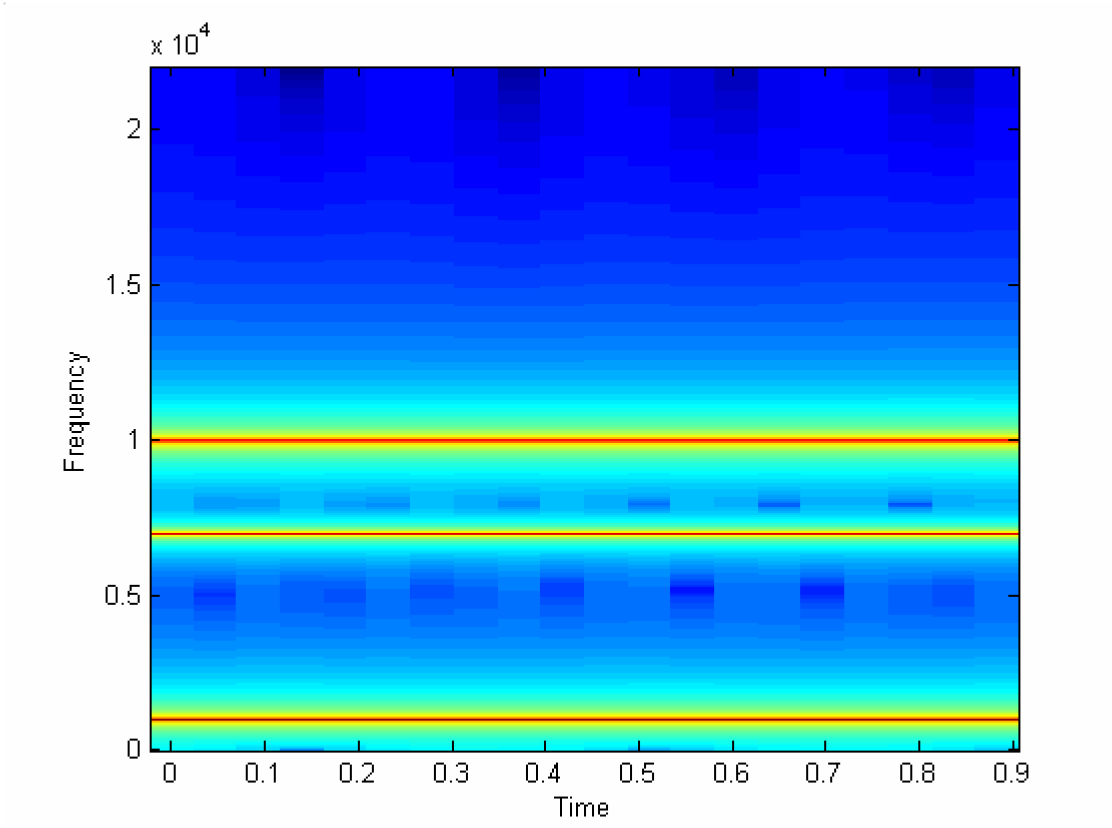


Figura 27

Si analizamos un sonido complejo, podremos observar las diferentes componentes de frecuencia que lo conforman tal como se aprecia en la figura 28:

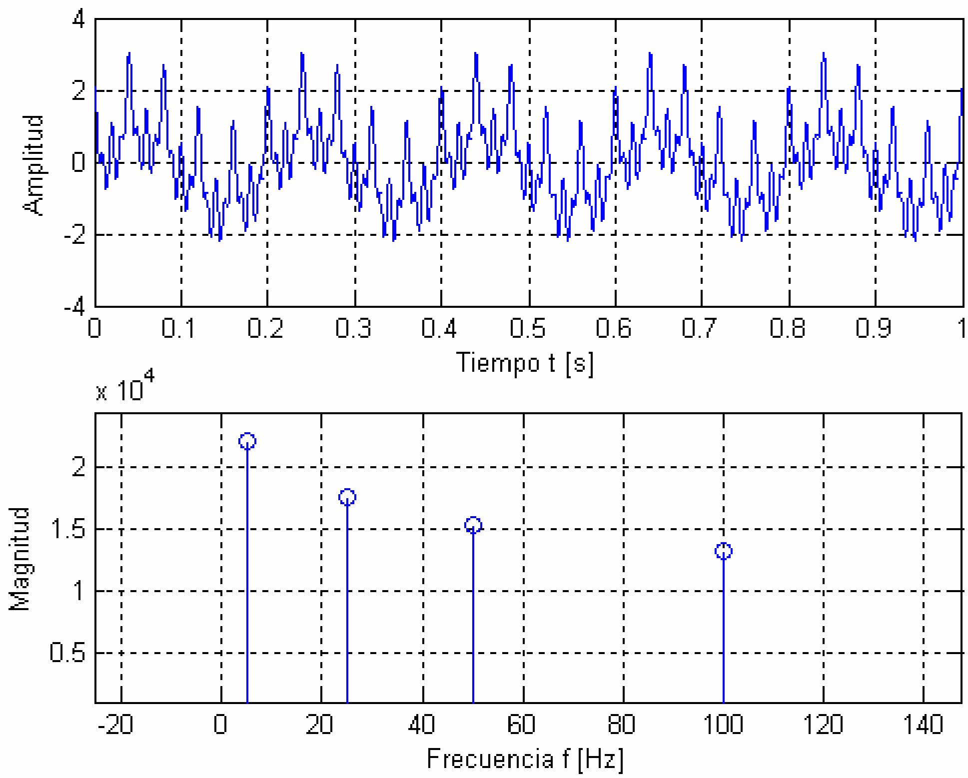


Figura 28

Para este caso, podemos observar que el espectro de la señal tiene componentes espectrales de 5, 25, 50 y 100 Hz respectivamente, entre las cuales, la frecuencia de 5 Hz es la mayor amplitud y, por lo tanto la de mayor predominancia la señal.

Clasificación de los diferentes espectros

Espectro Discreto: es aquel espectro que está formado por componentes discretas de frecuencia como se aprecia en la figura 29:

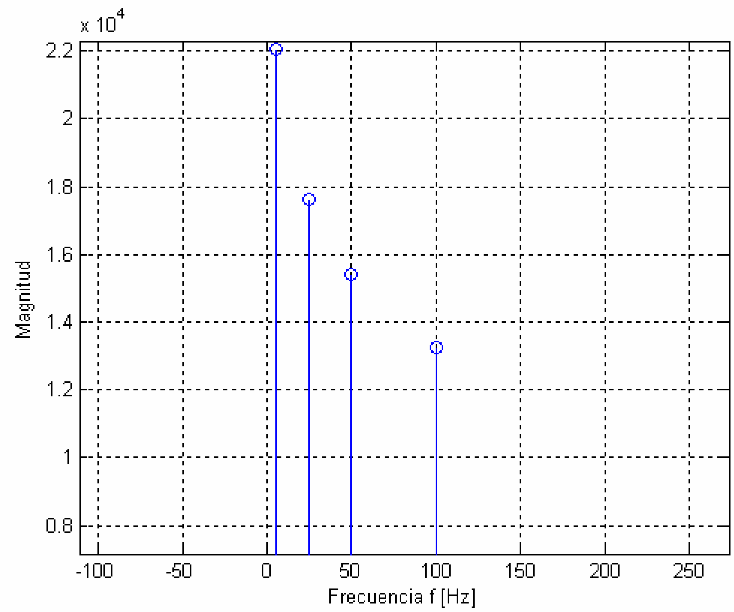


Figura 29

Espectro Continuo: Es aquel cuyas componentes espectrales están distribuidas de manera continua sobre un rango de frecuencia, tales casos son apreciables en señales tales como ruidos aleatorios, pseudo aleatorios, impulsos y barridos de frecuencia. Tal como se muestra en la figura 30:

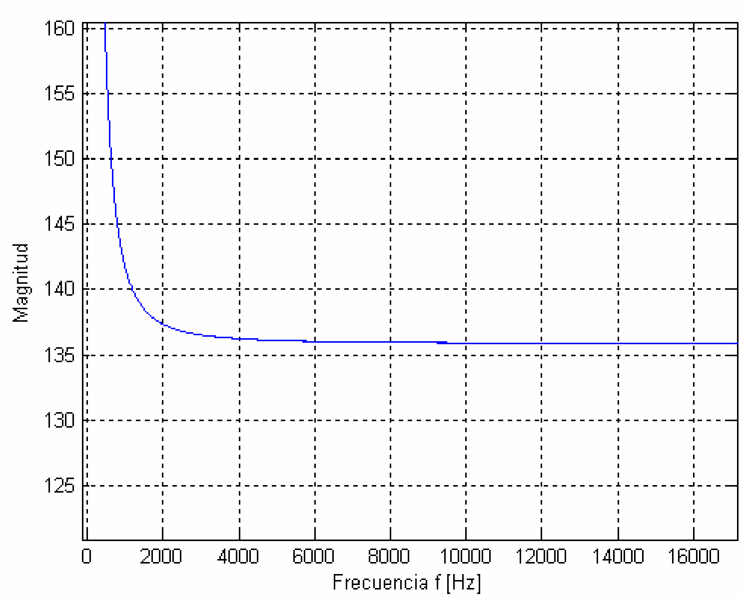


Figura 30

Espectro Complejo: Es aquel que posee componentes continuas y discretas tal como se aprecia en la figura 31:

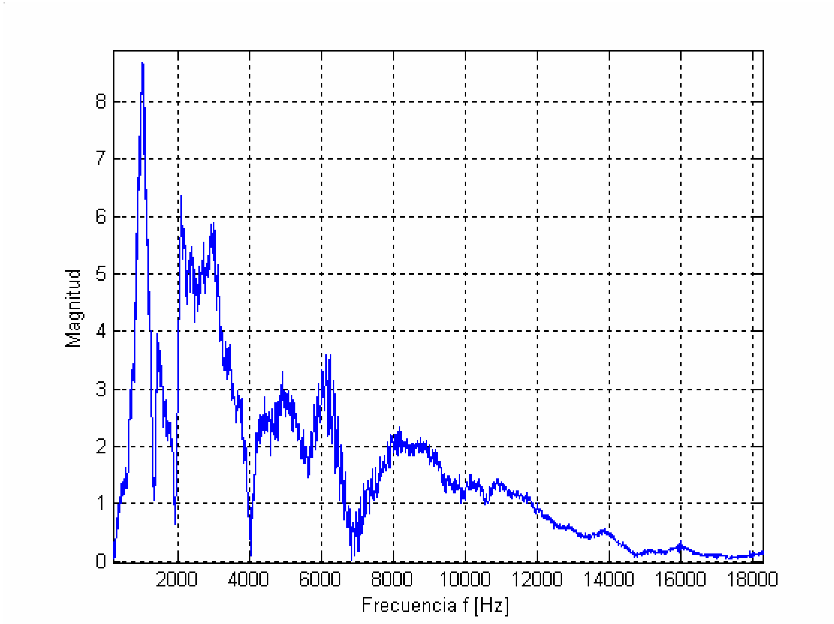


Figura 31

Energía Espectral:

Si consideramos el espectro de una señal dividido en trozos de sección Δf, los cuales corresponden a un cierto intervalo de frecuencia (definido como ancho de banda), la energía total del espectro será definida como la suma de las componentes espectrales multiplicada por un ancho de banda de 1Hz, en otras palabras, la energía total corresponde al área total que encierra el espectro.

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \quad (74)$$

Este ancho de banda de 1Hz se debe a que el oído humano no es capaz de procesar frecuencias discretas, sino, anchos de banda y el umbral de diferenciación de frecuencias es de 1Hz.

Podemos observar un ejemplo de energías discretas en la figura (32):

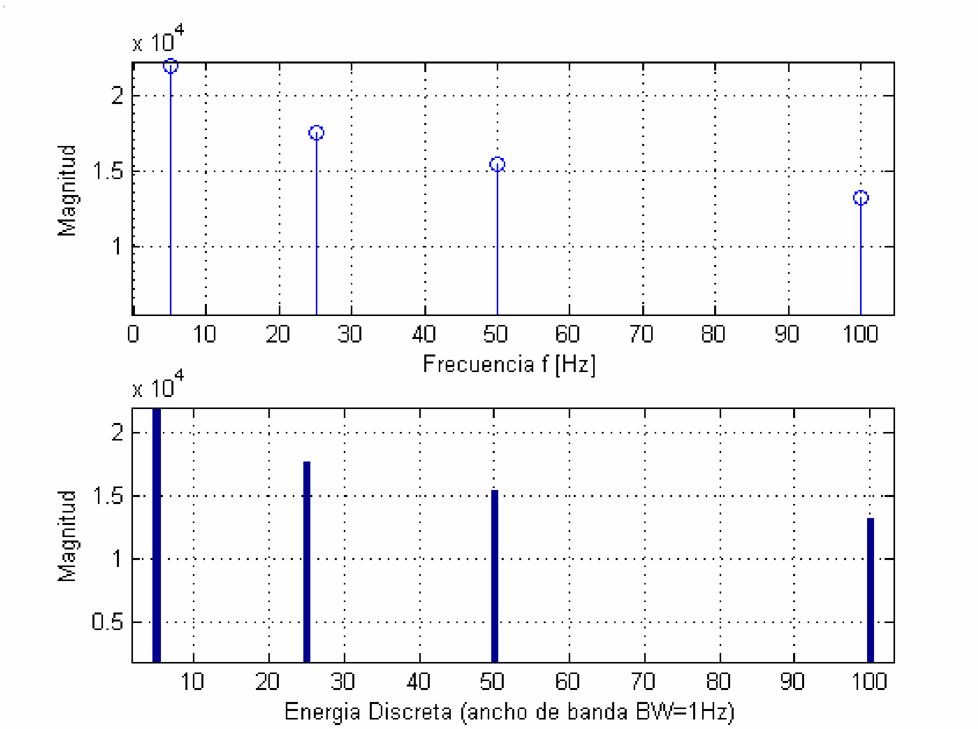


Figura 32

Por lo tanto la energía total será la suma de estas componentes.

De manera general, para un ancho de banda Δf dado, la energía total del espectro está dada por:

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i \cdot \Delta f \quad (75)$$

Densidad Espectral de Potencia: Se define como la energía contenida en un cierto ancho de banda, está dado por:

$$S(f) = \frac{E_i}{\Delta f} \quad (76)$$

1.9 Teorema de Fourier

El teorema de Fourier es una de las revolucionarias herramientas matemáticas desarrollada por el matemático francés Baron Joseph Fourier (1768 - 1830).
Su origen se debe a la búsqueda de la solución de la ecuación del movimiento de las vibraciones de una cuerda.

El teorema de Fourier establece que cualquier función periódica, que cumple ciertas condiciones, puede ser expresada como la suma de infinitas funciones senoidales y cosenoidales múltiplos de la frecuencia de la señal original, es decir, si la función periódica a representar tiene un periodo T, lo que implica que su frecuencia es $f_1 = \frac{1}{T}$, entonces la función puede ser representada como la suma de funciones armónicas puras de frecuencias $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, ...$, esto implica que si generamos una serie de tonos puros, y los mezclamos (a través de superposición), podremos **sintetizar** una señal compleja.

De manera más precisa, el Teorema de Fourier establece que:

Si $f(t) = f(t+T)$, con $f_1 = \frac{1}{T}$ y $w_1 = \frac{2\pi}{T}$ entonces, $f(t)$ puede ser representada como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Cos(w_1 \cdot n \cdot t) + b_n Sin(w_1 \cdot n \cdot t) \quad (77)$$

Donde a_n y b_n son las amplitudes de cada armónico que compone la señal.

Podemos definir entonces:

Frecuencia Fundamental: Es la frecuencia de la señal a ser representada, por lo tanto es la frecuencia más baja que habrá. Las frecuencias de las señales senoidales y cosenoidales que la siguen serán múltiplos de ésta. Si el período de la función $f(t)$ es T, entonces la frecuencia fundamental está dada por:

$$f_1 = \frac{1}{T} \quad (78)$$

Armónicos de la función: Son las señales senoidales y cosenoidales que conforman la función y cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental, es decir, los armónicos de la señal con frecuencia fundamental $f_1 = \frac{1}{T}$, tienen armónicos con frecuencias:

- Primer Armónico: $f_2 = 2f_1$
- Segundo Armónico: $f_3 = 3f_1$
- Tercer Armónico: $f_4 = 4f_1$
- etc. …

Como ejemplo consideremos la función periódica mostrada en la figura 33:

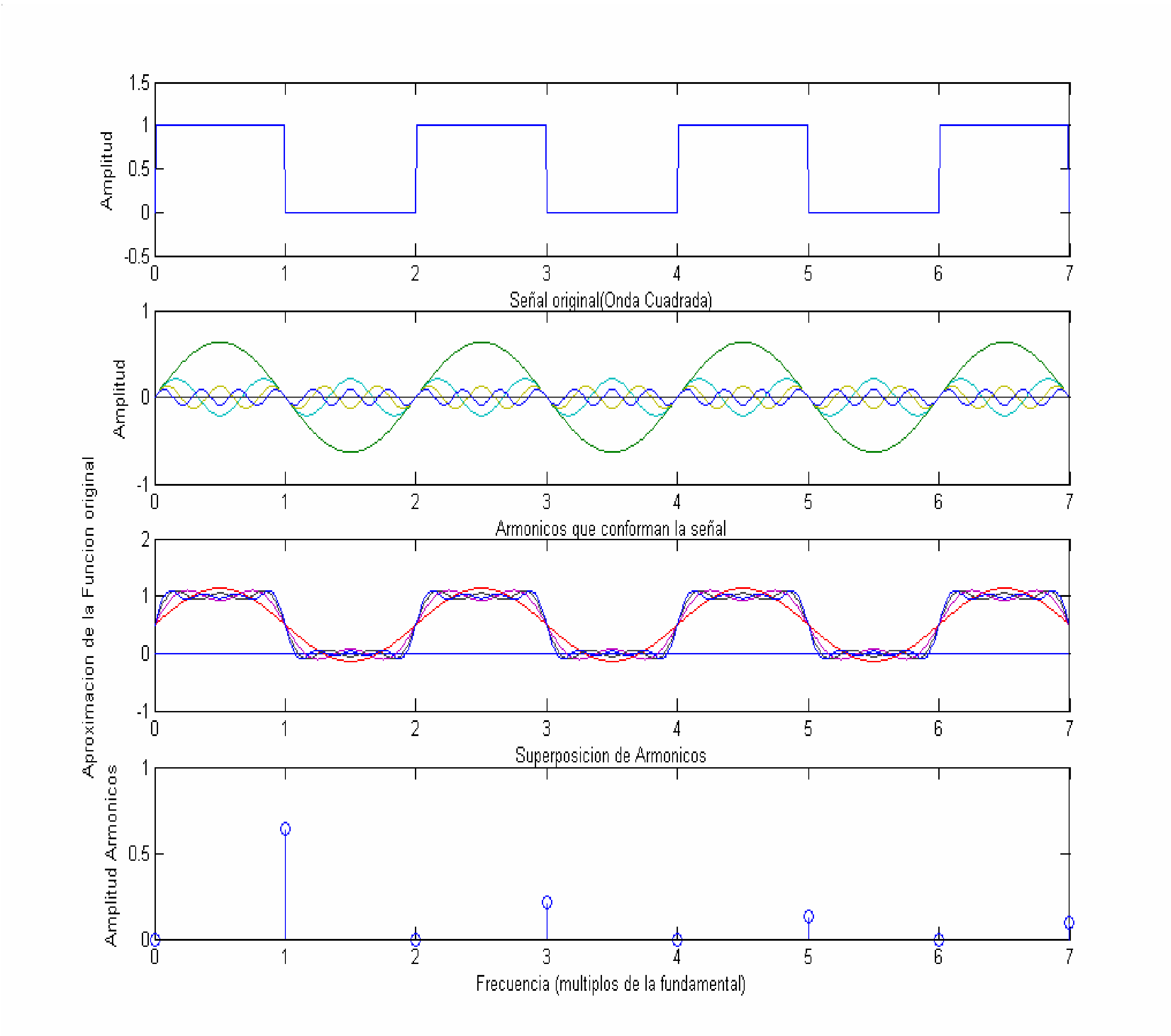


Figura 33

En la figura 33, el primer gráfico muestra la función "Onda cuadrada". El segundo gráfico muestra los 7 primeros armónicos que conforman esta función. El tercer gráfico muestra la superposición parcial de los armónicos, del cual podemos observar que a medida que se insertan armónicos, la función resultante de la superposición se aproxima cada vez más a la función original. En el cuarto gráfico podemos observar las amplitudes de los armónicos que conforman la función, que pare este caso son solo armónicos impares.

Como segundo ejemplo veremos un pulso, el cal es similar a la onda cuadrada, pero ya no cuadrado en cuanto a duración en el tiempo, tal como se aprecia en la figura 34:

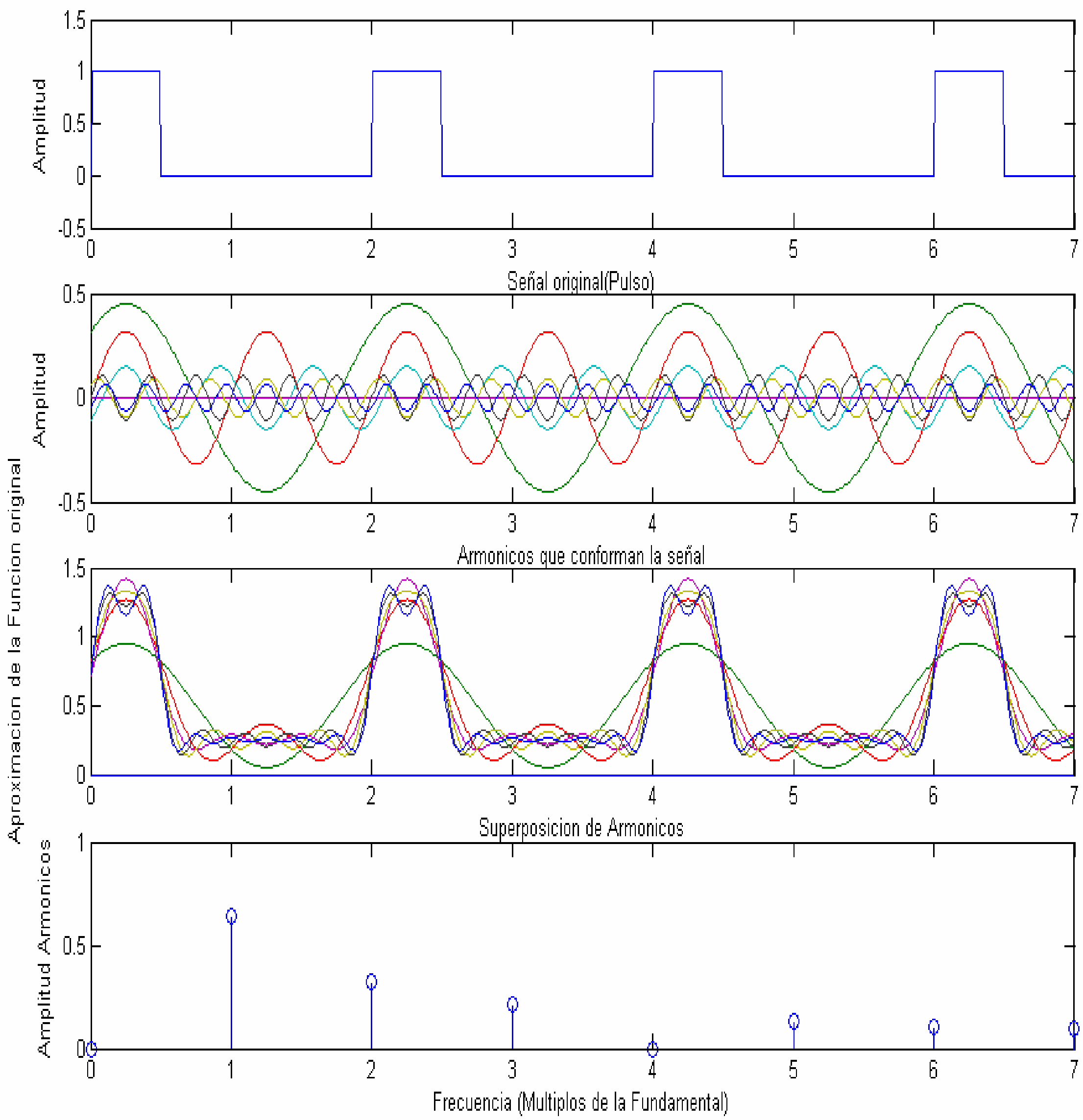


Figura 34

Para este caso, podemos apreciar de la figura 34 que ésta función periódica está formada tanto por armónicos pares e impares (observar cuarto grafico), y al igual que en el caso anterior, la suma de los sucesivos armónicos va aproximándose a la función original.

Como tercer ejemplo, en la figura 35 observaremos la función diente e cierra:

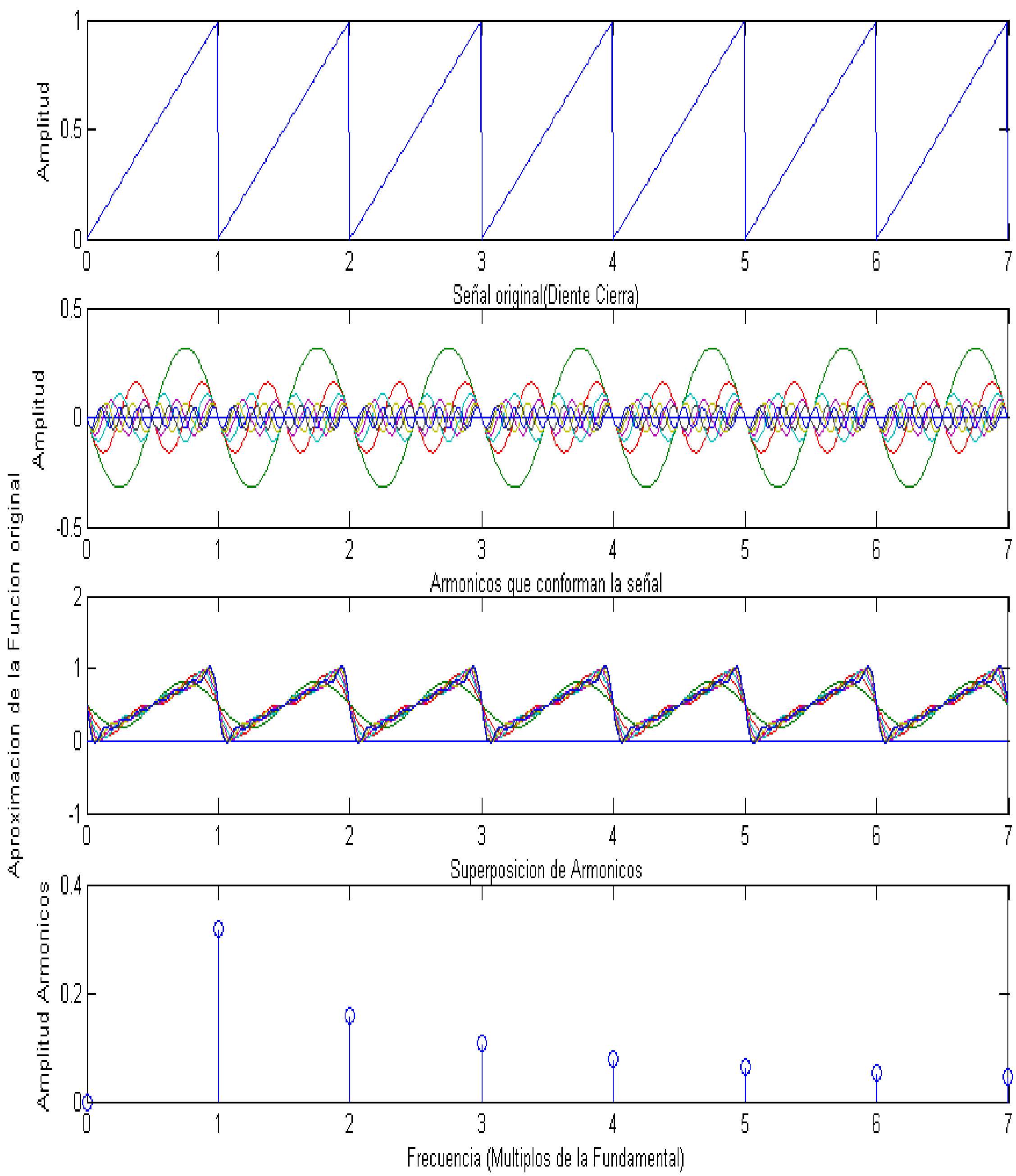


Figura 35

Para este caso, podemos apreciar de la figura 35 que ésta función periódica está formada tanto por armónicos pares e impares (observar cuarto grafico), y al igual que en el caso anterior, la suma de los sucesivos armónicos va aproximándose a la función original.

Como último ejemplo en la figura 36 se muestra la función Onda triangular:

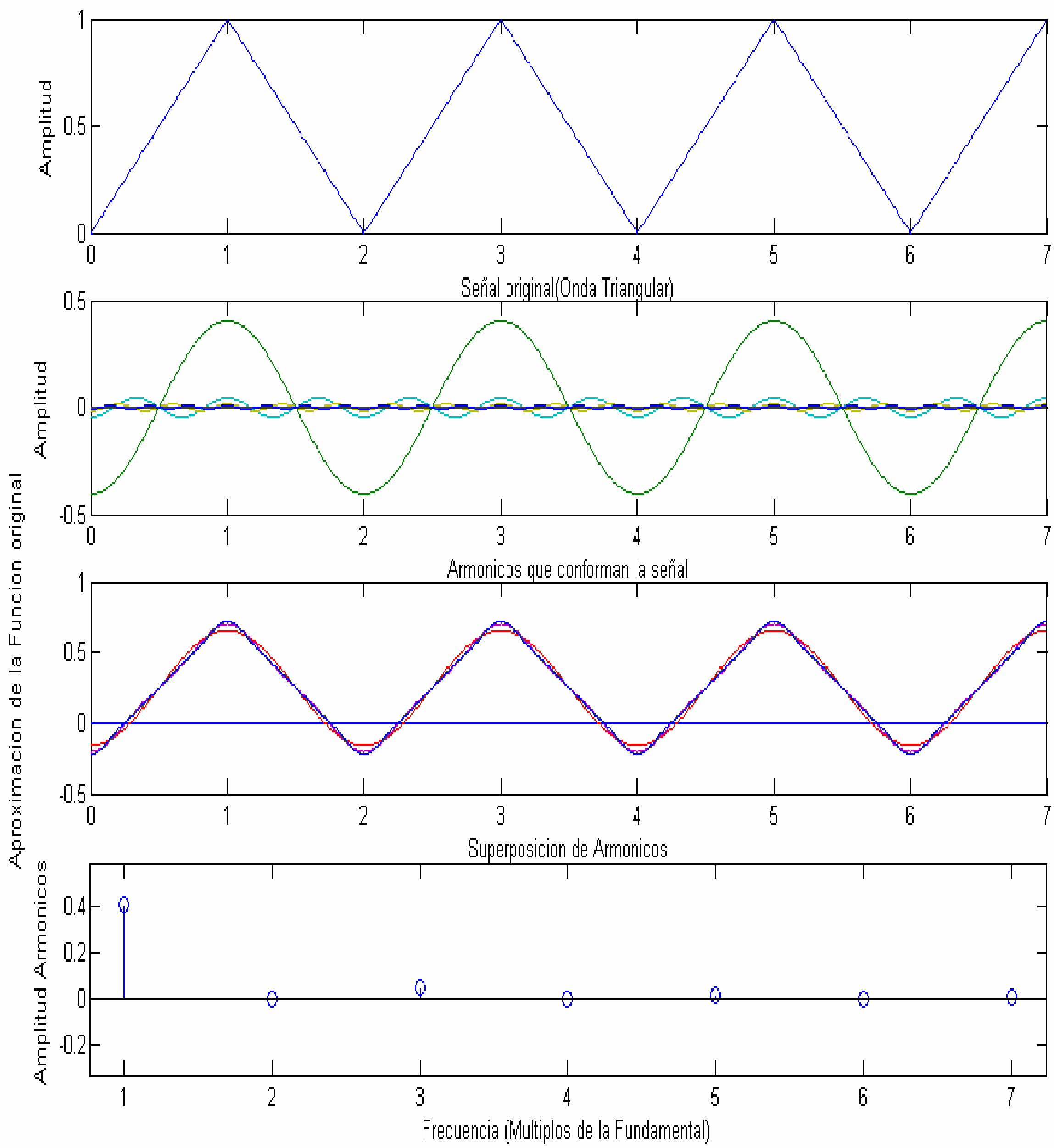


Figura 37

Para este caso, podemos apreciar de la figura 36 que ésta función periódica está formada sólo por armónicos impares (observar cuarto grafico), y al igual que en el caso anterior, la suma de los sucesivos armónicos va aproximándose a la función original.

1.10 Ruidos Aleatorios

Entenderemos como ruido o señal aleatoria, aquellas cuyos elementos que la conforma son obtenidos a través de un proceso aleatorio. Como caso particular nos remitiremos al estudio de señales aleatorias cuya densidad de probabilidad (función que representa la probabilidad para que un valor específico sea obtenido) es de la forma de la campana de Gauss, la cual se muestra en la figura 37:

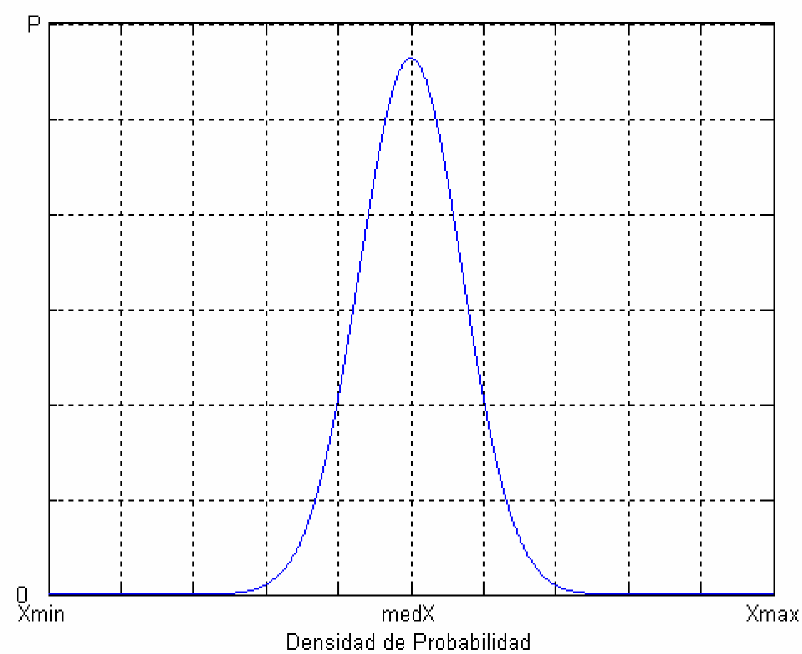


Figura 37

Por lo tanto, un ruido aleatorio obtenido mediante este proceso, tendrá como valores máximos y mínimos X_{Max} y X_{Min} respectivamente. Además se debe mencionar que el promedio de una señal obtenida mediante este proceso es X_{Med}, esto implica que una señal aleatoria con distribución Gaussiana tiene como promedio X_{Med}.

En la figura 38 se muestra una señal aleatoria de distribución Gaussiana:

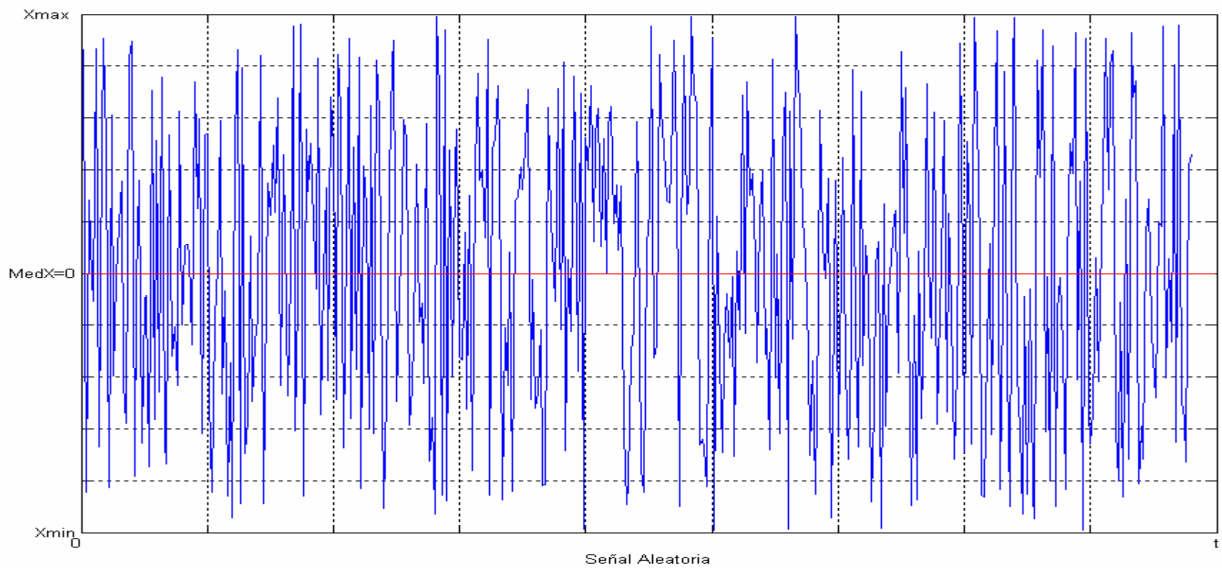


Figura 38

Ruido Blanco:

El ruido blanco es una señal aleatoria que tiene la característica de que el promedio de su espectro es plano, es decir, posee un espectro continuo y plano en todo el rango de frecuencias tal como se observa en la figura 39:

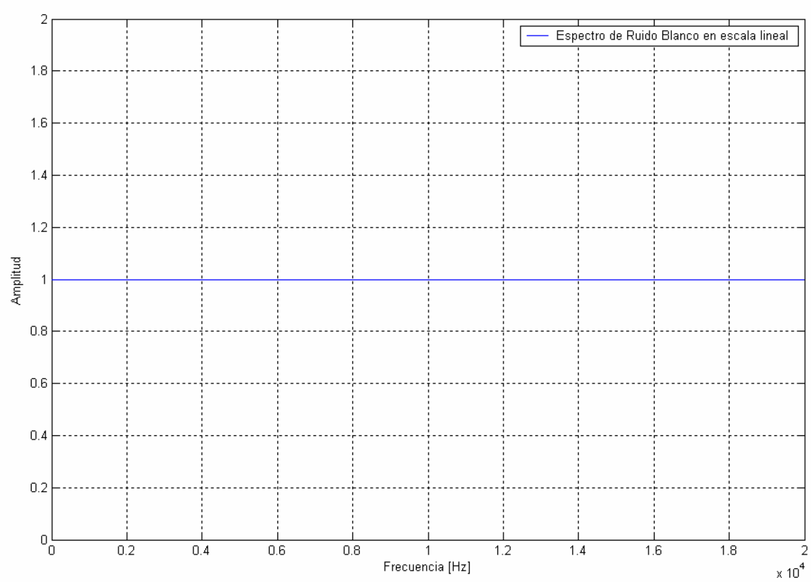


Figura 39

Si este ruido blanco es representado en escala logarítmica queda tal como se muestra en la figura 40:

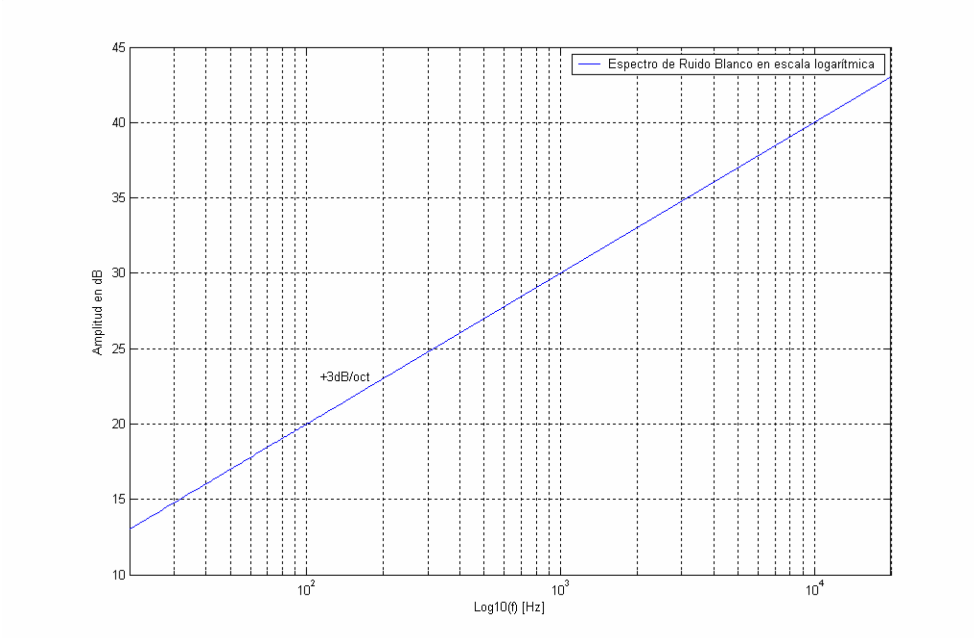


Figura 40

<u>Ruido Rosado</u>: El ruido Rosado es una señal aleatoria que tiene la característica de que el promedio de su espectro decae de manera inversamente proporcional a la frecuencia, es decir, posee un espectro continuo cuya amplitud decae de la forma $A = 1/f$ tal como se observa en la figura 41:

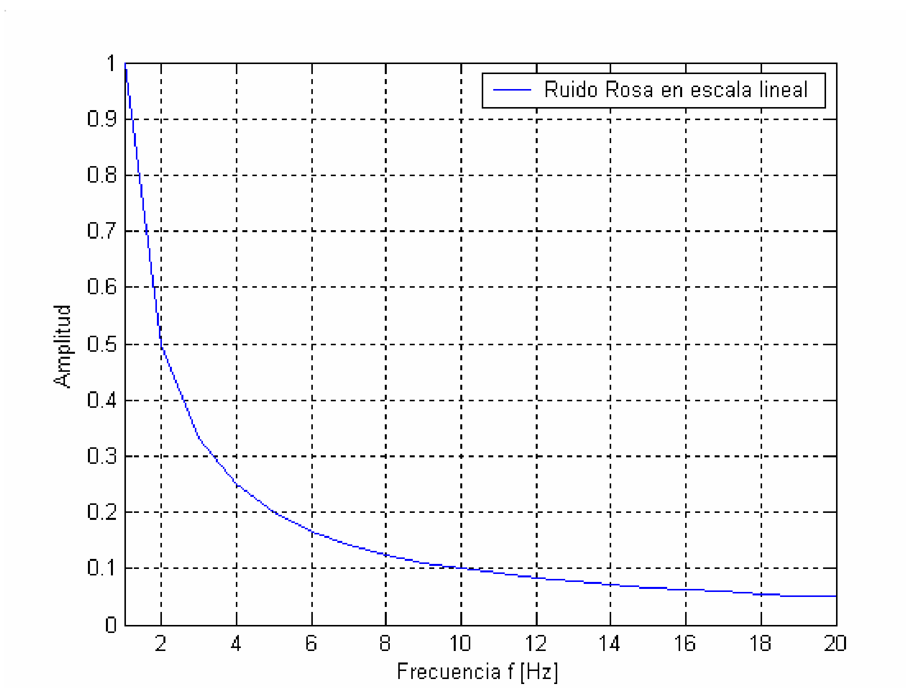


Figura 41

Si este ruido Rosado es representado en escala logarítmica queda tal como se muestra en la figura 42:

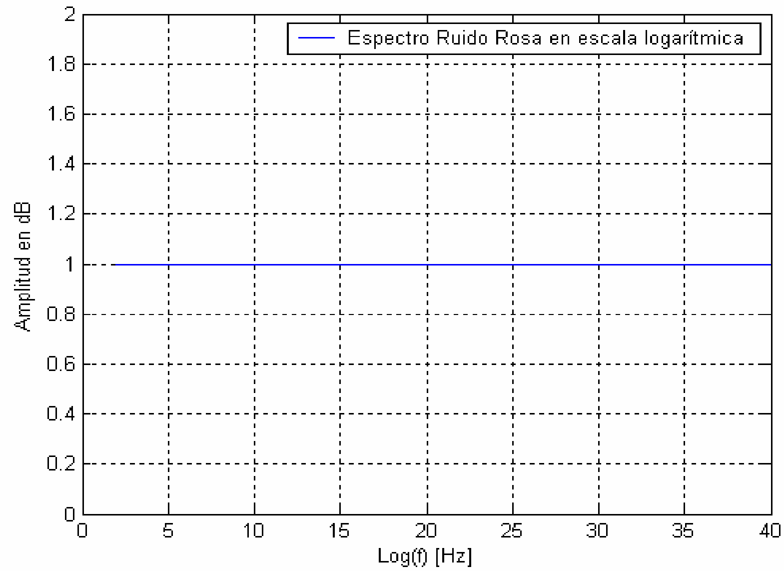


Figura 42

<u>Ruido Café:</u> El ruido café es una señal aleatoria que tiene la característica de que el promedio de su espectro decae de manera inversamente proporcional a la frecuencia al cuadrado, es decir, posee un espectro continuo cuya amplitud decae de la forma $A = 1/f^2$ tal como se observa en la figura 43:

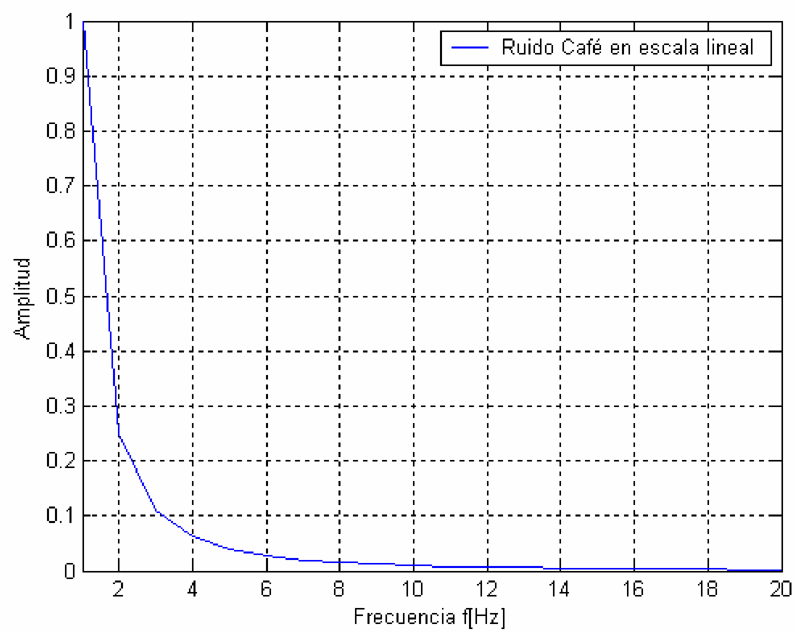


Figura 43

Si este ruido café es representado en escala logarítmica queda tal como se muestra en la figura 44:

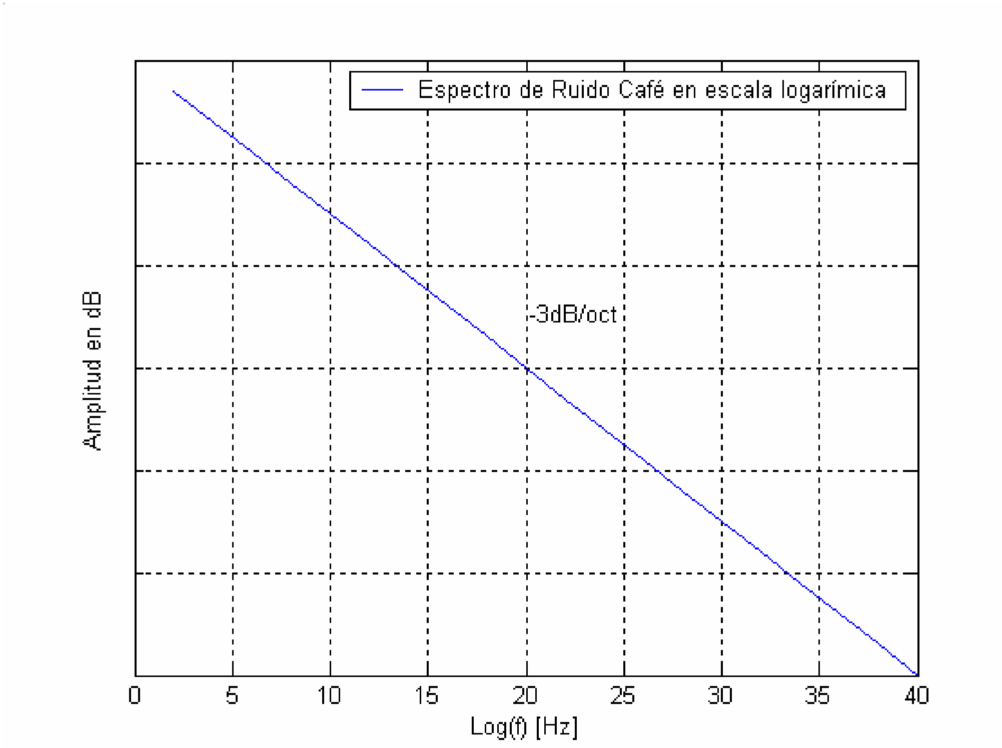


Figura 44