Apéndice A

Análisis de la cuerda vibrante

El análisis que se realiza en este anexo sigue la formulaciones convencionales de la mecánica clásica y como tal puede encontrarse de forma parecida en multitud de libros de texto. Nuestro interés es estudiar los movimientos que desplegaría una cuerda teórica, que estuviese anclada en sus dos extremos a puntos fijos y que fuera desplazada de su situación de equilibrio por un agente externo.

Fijemos, por lo tanto, nuestra atención (c.f. Figura **??**), en una cuerda de longitud L, anclada en sus dos extremos a dos puntos fijos. Llamemos $y = y(x, t)$ a la función que expresa el desplazamiento lateral de la cuerda en un punto x, en un instante t, (cumpliéndose siempre que $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$).

Cuando se produce una perturbación de la cuerda de su situación de equilibrio, por ejemplo, mediante un desplazamiento lateral de la misma en un punto (es el caso, por ejemplo, que se produce cuando se pulsa la cuerda de una guitarra) o, mediante percusión instantánea (situación que se da cuando se impacta la cuerda de un piano con el martillo correspondiente una tecla) podemos analizar el movimiento inducido en la cuerda.

El desarrollo que sigue a continuación hace uso de la segunda ley de Newton, expresada en su forma más conocida: $fuerza = masa\ x\ aceleracion$. También resulta posible realizar el análisis, y tal vez resulte algo más elegante, en base al principio de conservación de la energía, es decir al principio de que la energía aportada a la cuerda inicialmente (bien en forma de un desplazamiento de su posición de equilibrio, bien en forma de velocidad inicial) no se pierde sino que se mantiene constante a lo largo de todo el movimiento (en el caso ideal de que se desprecien las fuerzas diversos fenómenos disipativos). Ambas aproximaciones responden a los mismos principios básicos de la mencánica teórica y el resultado es idéntico sea cual sea el camino elegido.

Bajo la hipótesis de el desplazamiento de la cuerda de su posición de equilibro es muy pequeño en comparación con su longitud, podemos ignorar los movimientos longitudinales de un segmento pequeño (infinitesimal, como suele decirse) de cuerda como el de la figura (c.f. Figura **??**) y concentrarnos exclusivamente en el movimiento transversal.

Haciendo la aproximación habitual de que $\frac{dy}{ds} \simeq \frac{dy}{dx}$ cuando el ángulo tendido por el segmento de cuerda sobre la horizontal es muy pequeño y que la variación de la tensión en horizontal es, también, muy pequeña en comparación con el valor inicial de la tensión T, tenemos que la fuerza neta ascendente sobre el segmento de cuerda es

$$-T\frac{\partial y}{\partial x} + T\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \tag{A.1}$$

y, esta fuerza debe ser igual a la masa del segmento (que puede expresarse como la densidad lineal ρ por la longitud l) por la aceleración lateral, es decir

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dx \quad \text{y haciendo } c^2 = \frac{T}{\rho} \quad \Rightarrow c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{A.2}$$

Esta es la ecuación que represnta la vibración transversal de una cuerda tensionada en las condiciones ideales mencionadas.

Afortunadamente resulta bastante fácil resolver esta ecuación, pudiendo emplearse diversos métodos matemáticos. En cualquier caso, el problema, esta, lo que los matemáticos llaman 'bien determinado', si a la ecuación anterior se le añaden las condiciones iniciales y las condiciones de contorno, es decir: la condición de que los extremos de la cuerda están siempre en reposo, y la condiciones iniciales, que indican la posición y velocidad inicial de la cuerda antes de dejarla libre donde L es la longitud de la cuerda:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad y(x,0) = y_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}(x,0) = \dot{y}_0(x) \tag{A.3}$$

Una forma frecuente de resolver la ecuación **??** es emplear el denominado procedimiento de separación de variables, es decir en buscar soluciones del tipo $y(x,t) = X(x)T(t)$, lo que da lugar a:

$$c^2T(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \;\Rightarrow c^2\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \tag{A.4}$$

Como el lado izquierdo de la ecuación solamente puede ser una variable de x y el lado derecho de t, la única opción para que dicha ecuación se cumpla es que ambos términos sean igual a una constante que, por conveniencia, suele denominarse $-\omega^2$. De esta forma la ecuación diferencial original (en derivadas parciales de x y t) puede desglosarse en las siguientes ecuaciones diferenciales simples

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}X(x) = 0, \quad \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{A.5}$$

No deber sorprender la aparente manipulación que este método de resolución conlleva. La ecuación fundamental de la vibración de la cuerda junto con sus condiciones iniciales y de contorno, son, ya se ha señalado, lo que en matemáticas se llama un problema bien determinado y esto significa que existe una solución y sólo una que cumpla dichas condiciones. Cualquier método que nos lleve a encontrar dicha solución nos debe dejar tranquilos de que estamos ante la solución 'real' de la ecuación en cuestión.

Es fácil comprobar que la solución general de las dos ecuaciones anteriores es de la forma

$$X(x) = A\sin(\frac{\omega}{c}x) + B\cos(\frac{\omega}{c}x) \qquad T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \tag{A.6}$$

Donde A, B, C y D son constantes a determinar que nos permitirán asegurar el cumplimiento de la condiciones iniciales y de contorno. En particular, como $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ para todo instante t, tenemos que $B = 0$ y que cualquier A cumple la condición si se satisface el requisito $\frac{\omega}{c}L = n\pi$, donde n es cualquier número entero. Es decir la solución general de la ecuación de la cuerda es:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \cdot [C_n \sin(\frac{n\pi c}{L}t) + D_n \cos(\frac{n\pi c}{L}t)] \tag{A.7}$$

Y C_n, D_n serían series de coeficientes a determinar en función de las condiciones iniciales a lo largo de la cuerda

En el caso de que la cuerda se pulse mediante un desplazamiento en un punto de su extensión, o se golpee en un punto para luego ser libremente abandonada a su vibración tenemos que habrán de cumplirse dos condiciones iniciales, una referida a la forma inicial de la cuerda y la otra a su velocidad inicial.

Es decir, si llamamos $f_0(x)$ a la función que describe la forma inicial de la cuerda y $v_0(x)$a la función describe la velocidad inicial de la cuerda a lo largo de su extensión, se tendría que para $t = 0$:

$$\begin{aligned} f_0(x) = y(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \\ v_0(x) = \dot{y}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi c}{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x) \end{aligned} \tag{A.8}$$

De donde puede deducirse el valor de los coeficientes C_n y D_n. En las secciones siguientes, veremos dos ejemplos ilustrativos(, que se parecen -de manera simplificada- a las situaciones que podemos encontrar en los casos de guitarra y el piano.).

Sin embargo, es posible deducir un buen número de propiedad interesantes de la ecuación **??** incluso antes de aplicar ninguna de las condiciones iniciales. Y, resulta útil hacerlo así puesto que dicha ecuación expresa de forma bastante general (sólo se ha llegado a ella imponiendo la condición de los extremos fijos) como vibra la cuerda de forma natural, independientemente de como se excite su movimiento inicial. ¿Qué podemos deducir de ecuación?. Entre otras cosas, por ejemplo las siguientes:

- El movimiento de la cuerda es la suma de un número infinito, en principio, de movimientos que pueden interpretarse como independientes, que suelen llamarse en física 'modos' de vibración. Cada uno de estos 'modos' de vibración conlleva una una forma única de moverse la cuerda, y su expresión normalizada (es decir reduciendo su amplitud máxima a 1 es cada uno de los términos de la expresión $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$. La figura **??**) muestra el aspecto de cada uno de estos modos. Como puede verse se trata de formas de onda de longitud de onda decreciente. El primer modo, a veces, suele llamarse modo fundamental y suele ser el modo que tiende a contribuir más al movimiento, tanto en amplitud, como en el porcentaje de energía absorvida.Según sube el valor de n y los modos tiene una longitud de onda más corta, su contribución al moviento suele ser menor. Además, aunque el modelo teórico usado, es perfectamente lineal (es decir el movimiento total puede estudiarse como la suma de un conjunto de modos de vibración independientes, desacoplados entre si y sin amortiguamiento alguno) en la práctica, los modos altos van decayendo antes en el tiempo, debido a que en su movimiento si resultan más relevantes las fricciones internas que el análsis ha ignorado.

- Cada uno de los modos tiene una evolución llamada armónica en el tiempo, caracterizada por un movimiento periódico de frecuencia f

dada por $2\pi f = \frac{n\pi}{L}$. Es decir por $f = \frac{nc}{2L}$. Este resultado es muy interesante porque, muestra que cada uno de los modos 'oscila' con una frecuencia creciente, así para si para $n = 1$, la frecuencia del primier modo es $f_1 = \frac{c}{2L}$, las sucesivas frecuencias para $n = 2, 3, \ldots$ son, $2f_0, 3f_0, 4f_0, 5f_0, 6f_0, \ldots$

- La combinación particular de modos que son más 'motivados' a vibrar, en una situación determinada, viene dada por las condiciones iniciales, es decir por el movimiento o desplazamineto otorgado a la cuerda. Lo interesante es que cada modo 'suena' de una forma diferente. Así los modos, altos suenan más agudos y los bajos más graves. El abanico de modos activos en un momento dado es lo que suele llamar en física la composición esprectral de la vibración y, puede adelantarse aquí, que en lá practica es lo que tiende a caracterízar el diferente timbre de los instrumentos. Instrumentos con un timbre muy brillante generan espectros en que los modos altos son importantes. Instrumentos más 'cálidos' tienen modos de vibrar de baja frecuecia. En el caso de instrumentos complejos, la forma de los modos de vibración es mucho más compleja que en el caso de la cuerda, pero responde (en el caso ideal) a los mismos principios de superposición lineal de modos independientes de frecuencia creciente.

  En el caso de la cuerda vibrante, la ecuación **??** muestra que siempre, la cuerda vibra en sus modos naturales dando lugar, por lo tanto, a la misma nota. Sin embargo, el peso de cada modo puede variar dependiendo de la forma de actuar sobre la cuerda y eso dará lugar a un brillo diferente en el sonido final. Esta experiencia es fácil de realizar con un guitarra, por ejemplo, pudiendo comprobarse que al pulsar la cuerda más cerca de los puntos de apoyo, el sonido toma un caracter más metálico, indicación de que se han activados modos más altos. Sin embargo, el modo fundamental estará también presente y será el que siga marcando el caracter de la nota.

- En el caso de la cuerda vibrante, la frecuencia del modo fundamental depende de forma inversa con la longitud de la cuerda. Esto permite deducir que si se reduce la longitud de la cuerda a la mitad, manteniendo la tensión longitudinal, se genera un sonido 'fundamental' cuya frecuencia es el doble. Si reduce a un tercio de la longitud original se genera un 'modo fundamental' cuya frecuencia es el triple, y así sucesivamente. Es fácil imaginar como ésta pudo ser la forma en que los antigüos descubrieron las leyes de la consonacia: poniendo diversas cuerda tensionadas de diferente longitud y haciéndolas sonar simultaneamente (**??**

Cuadro A.1: Intervalos generados por los modos naturales

Modo	Frecuencia	Relación característica	Nombre del intervalo
1	f_0		
2	$2f_0$	2:1	octava
3	$3f_0$	3:2	quinta justa
4	$4f_0$	4:3	cuarta justa
5	$5f_0$	5:4	tercera mayor justa
6	$6f_0$	6:5	tercera menor justa
7	$7f_0$	7:6	tercera submenor
8	$8f_0$	8:7	super segunda
9	$9f_0$	9:8	segunda mayor
10	$10f_0$	10:9	seguna menor
5	$5f_0$	5:3	sexta mayor justa
8	$8f_0$	8:5	sexta menor justa
7	$7f_0$	7:4	séptima submenor

Hemos visto pues, que, al final, todos los movimientos de una cuerda vibrante (anclada en los extremos) son una combinación más o menos larga de movimientos simples de frecuencias crecientes. Es muy interesante observar que las frecuencias asociadas a los modos de vibración (así como las que se derivan de ir reduciendo la longitud de la cuerda, en la forma señalada) estan en la proporción $1, 2, 3, 5, 6, \ldots$. Pues la relación entre los sonidos asociados a cada una de esas frecuencias es lo que, desde la antigüedad se conoce como los intervalos.

A.1. Aparición y significado de los intervalos

El concepto de intervalo juega un papel fundamental en el desarrollo de las escalas musicales y también en la propia práctica musical. Posiblemente, la forma más clara de introducir estos conceptos esta en hacerlo en este momento, es decir, al estudiar los modos naturales de vibración. De esta forma, puede verse como los intervalos no son consecuencia de la existencia de una escala musical sino, como se verá en su momento, su origen.

Así se tiene que, usando la teminología clásica habitual en los intervalos se tiene (en el capítulo correspondiente al análisis instórico**??** se motivará la introducción de esta terminología). Si se toman los primeros (y por lo tanto los más importantes) modos de vibración de una cuerda puede construirse una tabla con las siguientes relaciones:

Naturalmente se pueden seguir identificando ratios y muchos de ellos han recibido nombres específicos a lo largo de la historia (ver [**?**] Apendice XX sección III). [1]

Los seis primeros modos de vibración han dado lugar, por lo tanto, a cinco intervalos básicos que, historicamente, se han considerado como 'consonantes' (y la experiencia acústica así lo confirma, porque son modos que suenan entre si sin extridencia o tensiones, aunque el grado de aceptación de la disonancía varia con el gusto personal y, sobre todo, con el entorno cultural).Estos intervalos pueden expresarse como relaciones entre los primeros números naturales $1, 2, 3, 4, 5$ y 6. El más consonante de todos los intervalos es el de octava, donde la frecuencía de la vibración es exactamente el doble de la frecuencia fundamental.

Resulta importante, en este contexto, identificar los intervalos complementarios de estos primeros cuatro intervalos (omitiendo la octava) dentro del intervalo de octava, porque dan lugar a otros intervalos útiles en el análisis y a la práctica musical. Por ejemplo. partiendo de una frecuencia fundamental f_0, si se aumenta una quinta se llega a $\frac{3}{2}f_0$, ¿cuanto le falta a este sonido para llegar a la octava, es decir a $2f_0$? , la respuesta es $\frac{4}{3}$ obviamente. De una forma más gráfica:

$$\underbrace{\underbrace{f_0 \ldots\ldots}_{quintajusta=\frac{3}{2}} \quad \frac{3}{2}f_0 \quad \underbrace{\ldots\ldots 2f_0}_{cuartajusta=\frac{4}{3}}}_{octava}$$

Asi, puede comprobase que los intervalos de cuarta y quinta son complementarios. Por su parte los intervalos de tercera mayor y tercera menor, dan lugar a los intervalos de sexta menor y de sexta mayor respectivamente. La discusión iniciada en esta sección será importante al hablar de la aparición y evolución de las escalas músicales, que son, al fín y al cabo, los componentes básicos con que trabajamos para hacer música. Así podra verse que se puede construir la totalidad de la escalas musicales occidentales a partir de la relaciones interválicas señaladas, simplemente mediante superposicion y traslación (aunque este procedimiento dará luego lugar al interesante fenómeno de las escalas temperadas y su dificultad de utilización práctica). En la tabla **??** se ha incluido también, fundamentalmente a título informativo, el intervalo de séptima menor y de segunda mayor, pero no es necesario elaborar aquí más sobre su significado, que se verá más claramente al hablar de la

[1]Como se verá en su momento, Esta diversidad de intervalo, conducirá a una cierta complicación práctica que fue 'resuelta' hacía el siglo XVI con la adopción de las escalas temperadas. Con la adopción de dichas escalas desparece, por ejemplo la diferencía entre la terecera submenor y la tercer menor justa, utilizándose en la actualidad la denominación de tercera menor, simplemente.

construcción de las escalas musicales.

En cualquier caso, como ya hemos señalado anteriormente, los modos más importantes (los que en la práctica tienden a absorver más energía y a comunicar más energía al aire en forma de ondas de presión que nosotros escuchamos son los más bajos. De esta forma puede verse como, a parte de la relación inmediata de octava, los intervalos más importantes son los de quinta y los de cuarta. Esto explica, en parte, la importancia histórica del intervalo de quinta y su papel fundamental. Y, tanto por ser complementario de este, como porque aparece en el segundo modo de vibración, el de cuarta. Estos intervalos marcan el caracter del sonido generado por la cuerda y, ya se verá como incluso juegan un papel fundamental en el análsis armónico. Así, cuando se hable de grados tonales y se veá lo fundamental que resulta la relación del llamado V grado con el grado I, recuerdese que aquel análisis encuentra parte de su razón de ser en los sencillos y hermosos resultados mostrados en esta sección.

A.2. Estudio de la cuerda pulsada

El análisis realizado en la sección anterior resulta válido para cualquier cuerda anclada en sus extremos que vibre de forma natural tras una perturbación inicial. Es un resultado, por lo tanto, bastante general, y sirve, por lo tanto, para imaginar como funcionan distintos tipos de intrumentos de cuerda, por ejemplo el piano o la guitarra. Ahora bien, si queremos estudiar un poco más en profundidad un instrumento en particular, por ejemplo la guitarra o el arpa, debemos introducir las condiciones iniciales propias de la perturbación inicial que dicho instrumento conlleva.

Así tomemos una cuerda de longitud L y introduzcamos un pequeño desplazamiento lateral δ_0 en un punto x_0 de la cuerda, ver figura **??**, luego abandonemos la cuerda a su vibración natural. Las condiciones iniciales asociadas a esta situación son:

$$\dot{y}(x,0) = 0, \text{ para } 0 \leq x \leq L \qquad \text{and} \tag{A.9}$$

$$y(x,0) = \frac{\delta_0}{x_0}x, \text{ para } x \leq x_0 \quad y(x,0) = \frac{L-x}{L-x_0}\delta_0, \text{ para } x_0 \leq x \leq L \tag{A.10}$$

Al igual la ecuación **??** con la **??** se deriva que que los C_n tienen que ser todos nulos, ya que esa es la única forma en que dicha condición puede ser cumplida. Por lo que respecta al desplazamiento inicial la sustitución de la expresión f_0 en la ecuación **??** por la expresiones **??** permite obtener los D_n. Para ello se pueden seguir diversos procedimientos. Uno sencillo es multiplicar ambos lados de la ecuación **??** por $\sin(\frac{m\pi x}{L})$, donde $m = 1, 2, 3, ...$ e integrar en el intervalo $[0, L]$. Esto da

$$\int_0^L f_0(x)\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L D_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi x}{L})dx \tag{A.11}$$

La integración del lado derecho de la ecuación **??** es fácil [2], pudiendo demostrase que los D_n toman la siguiente expresión:

$$D_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_0(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \tag{A.12}$$

Esta expresión permite calcular que importancia tiene cada modo de vibración dentro de la composición espectral del desplazamiento inicial cada uno de lo modos naturales de vibración de la cuerda. [3]

Sustituyendo en la ecuación **??** f_0 por las expresiones dadas en **??** e integrando, se llega al siguiente resultado:

$$D_n = \frac{2L^2\delta_0}{n^2\pi^2 x_0(L - x_0)}\sin(\frac{n\pi x}{L}) \tag{A.13}$$

Es interesante modificar la expresión anterior mediante el simple cambio de variable $x_0 = \xi_0 L$ donde $\xi \leq 0$ y representaria la fracción de L donde se produce el desplazamiento inicial de la cuerda

$$D_n = \frac{2\delta_0}{n^2\pi^2\xi_0(1 - \xi_0)}\sin(n\pi\xi) \tag{A.14}$$

Es interesante observar que los D_n no dependen de la longitud de la cuerda sino del punto relativo de la cuerda donde se pulsa. El caso mas sencillo es cuando la cuerda se pulsa exactamente en su centro y entonces $\xi = 1/2$, quedando que

$$D_n = \frac{8\delta_0}{(n^2\pi)^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) \tag{A.15}$$

En este caso, se tiene que $\frac{D_1}{\delta_0} = 0,8106$, lo que puede visualizar pensando el primero modo toma una amplitud máxima del 81 % del desplazamiento

[2] La integración es sencilla si se tiene en cuenta que solamente los términos en que $n = m$ no son nulos y que $\sin^2(\alpha) = \frac{(1-\cos(2\alpha))}{2}$.

[3] Se trata, lógicamente, del bien conocido desarrollo en serie de Fourier de la función f_0 o, si se prefiere, de la proyección de la función f_0 en el espacio funcional ortogonal formado por los vectores $\sin(\frac{m\pi x}{L})$

Cuadro A.2: Peso relativo de los modos naturales. Caso de la cuerda pulsada

	ξ				
modo	0,5,0	0,35	0,25	0,10	intervalo
1	100,00 %	100,00 %	100,00 %	100,00 %	fundamental
2	-	22,70 %	35,36 %	47,55 %	octava
3	11,11 %	1,95 %	11,11 %	29,09 %	quinta justa
4	-	6,67 %	-	19,24 %	octava
5	4,00 %	3,17 %	4,00 %	12,94 %	tercera mayor
6	-	0,96 %	3,93 %	8,55 %	quinta justa
7	2,04 %	2,26 %	2,04 %	5,34 %	séptima
8	-	1,03 %	-	2,97 %	octava
9	1,23 %	0,63 %	1,23 %	1,23 %	segunda mayor y/o novena
10	-	1,12 %	1,41 %	-	tercera mayor

inicial. Además, es fácil ver que todos los modos pares son nulos y que en el resto la amplitud disminuye con n^2

Resulta interesante estudiar como evoluciona, la composición exprectral, en definitiva los sucesivos valores de D_n según se desplaza el punto de aplicación del centro hacia los extremos. Así La tabla **??** muestra el peso relativo de cada uno de los modos frente al modo fundamental al que se le ha dado el valor de referencia de 100.

Como puede verse los modos más relevantes son los que corresponden al fundamental, a la primera octava y la de quinta justa y, en menor medida, al de tercera mayor. Resultado interesante ciertamente, y que explica, en parte, porque los llamados acordes triadas mayores tiene, precisamente, como estructura la nota fundamental, la tercera mayor y la quinta.

De forma complementaria la figura **??** permite visualizar la evolución del peso de los modos (los modos 2 a 10) según el punto de pulsación se mueve del centro a uno de los extremos. Puede verse como el segundo modo (la octava, de frecuencia $2f_0$ toma en seguida importancia y que el resto de los modos superiores requieren que nos situemos en el cuarto más próximo al punto de apoyo para que se produzca valores significativos. De hecho el valor $\xi = 0,25$ es un punto interesante (como también puede verse en la tabla) porque los tres primeros modos (el fundamental, la octava y la quinta) tienen valores significativos y el resto todavía no, mientras que más próximos al punto de apoyo los modos superiores toman mucha importancia.

Estos resultados podrían sugerir que el punto óptimo para pulsar una cuerda de guitarra sería a un cuarto de su punto de apoyo (o quizas un poco más a la derecha hacia $\xi = 0,2$ donde aparece la tercera mayor), ya que generaria un sonido más armónico, más rico. Resulta curioso comprobar

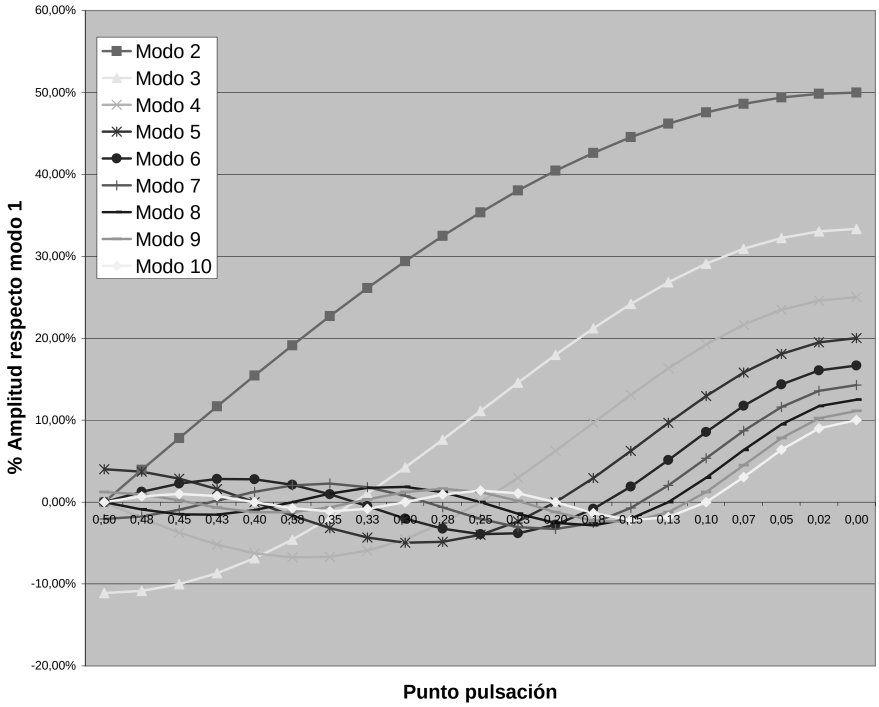

Figura A.1: Evolución del peso de los modos con el punto de pulsación

que esto no es una mera especulación. En efecto, si se toma una guitarra se podrá comprobar como un cuarto de la longitud de la cuerda medida desde el puente nos situa justo en la zona habitual de pulsación, en cima de la boca de la caja. Pulsando una cuerda al aire en ese punto, se genera un sonido calido y pleno. Si por ejemplo se busca el punto medio de la guitarra (que se corresponde con el punto de contacto del mastil con la caja) se verá que queda un sonido puro pero poco rico, correspondiente al caso en que casi toda la energía es abosrvida por el primer modo. Por contra, pulsar muy cerca del puente arroja efectivamente sonidos metálicos que delatan la presencia de armónicos superiores.

También puede observarse (de forma general a partir de la ecuación **??**) como señala Helmholtz [**?**] que si el punto de pulsación corresponde con una división entera de la cuerda, el modo correspondiente y todos sus múltiplos son nulos.

Un aspecto no comentando, pero que tiene su importancia en la práctica de los instrumento de cuerda pulsada es la influencia de que la forma de pulsación tiene sobre el sonido generado. En efecto, el modelo sencillo utilizado en esta sección, contempla un desplazamiento de un punto, de forma que la cuerda toma una forma puntiaguda en el momento de máxima tensión. Esta forma de desplazamiento se correspondería, aproximadamente, con pulsación mediante un objeto te poca superficie, por ejemplo el borde de un cuchillo. En el caso de la guitarra, la pulsación real se realiza mediante los dedos. Si la pulsación se realiza con la yema del dedo, la forma del desplazamiento original tiene que ser más redondeada que la que el modelo sencillo a supuesto. Esta forma más redondeada del punto de apoyo, inevitablemente dará lugar a que la composión espectral del desplazamiento inicial (y por lo tanto del movimiento) sea más suave y que los armónicos superiores tengan menos pesos. Si la pulsación se realiza con la uña del dedo, la forma del desplazamiento inicial será más puntiaguda y se generaran armónicos de mayor frecuencia. Esta es circunstancia es de hecho un aspecto discutido en la práctica interpretativa de la guitarra, donde algunos maestros prefieren usar más el ataque con uña y otros gustan más de usar la yema. A este respecto Dionisio Aguado en su histórico método de guitarra señala [**?**]

> Yo siempre había usado de ellas [las uñas]; pero luego que oí a mi amgio Sor, me decidí a no usarla en el pulgar, y estoy muy contento de habverlo hecho, porque la pulsación de la yema, de este modo, cuando no pulsa paralelamente a la cuerda, produce sonidos enérgicos y gratos, que lo que conviene a la parte del bajo, que regularmente se ejecuta en los bordones: en los demás dedos las conservo.
>
> Considero perferible tocasr con uñas.Buen usadas, el sonido que resulta es limpio, metálico y dulce. Se han de cortar en forma oval y han de sobresalir poco de la superficie de la yema.

A.3. Tensión transmitida a la caja de resonancía

El modelo de cuerda pulsada resulta muy útil por que, siendo muy simple, arrojar unos resultados muy ricos. Ahora bien, una de las simplificaciones realizadas en la construcción del modelo, a saber, que los extremos en que se apoya la cuerda son perfectamente rígidos implicaría una situación práctica poco útil desde el punto de vista músical. En efecto, si los extremos fuesen perfectamente inamobibles, la cuerda vibraría y transmitiría algo de su vibración al aíre, pero lo haría de una forma casi impercetible ya que su pequeña superficie cortan el aíre al moverse y apenas si movilizan una masa apreciable de aíre. De esta forma (y la experiencia puede realizarse) apenas se oiría un zumbido proveniente de la cuerda. Por esta razón, todos los instrumentos de cuerda estan motados sobre una caja de resonancia (por ejemplo, en la guitarra o en los instrumentos de madera). Los puntos de apoyo de la cuerda en estos instrumentos no son perfectametne fijos, sino no que son capaces de transmitir una pequeña vibración a la estructura de la caja, la cuál vibra y, ésta sí, transmite la vibración al aire.

Es interesante reparar que aunque visualmente el movimiento de los apoyos sea imperceptible, este existe y además se realiza siguiendo exactamente la frecuencias correspondientes a cada uno de los modos de vibración. En cierta forma, es como si cada modo de vibración se transmite a través de los apoyos a la caja. Ahora bien, el diseño de la caja afecta a que modos tiene más efecto sobre la vibración de la misma. Siendo esta relación el objeto de análisis del 'acomplamiento' de la caja con modos de vibración de las cuerdas.

En la sección anterior hemos estudiado como diversos modos tienen diversas amplitudes y, por lo tanto, como los diversos modos contribuyen al movimiento de la cuerda en diferente proporción. Resulta también de interés estudiar como evoluciona la fuerza que la cuerda transmite al soporte. El cálculo de esta tensión es elemental una vez que se ha resuelto la ecuación del movimento. En efecto, teniendo en cuenta que la tensión vertical T_y y recordando la solución general y que $C_n = 0$ y que los D_n están dados por , se tiene

$$T_y = T\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2T\delta_0}{Ln\pi\xi_0(1-\xi_0)}\operatorname{sen}(n\pi\xi_0)\cos(\frac{n\pi c}{L}t) \tag{A.16}$$

Resultado que ya permite ver que, curiosamente, la tensión vertical en el extremo decaé con el inverso de $n/\operatorname{sen}(n\pi\xi_0)$ en vez de con $n^2/\operatorname{sen}(n\pi\xi_0)$ como es el caso de la amplitud. Es decir, la amplitud de los modos superiores decaé más rápidamente que la tensión que estos modos producen en el extremo. En suma, los modos superiores pueden tener más importancía en el peso del sonido, de lo que sosprechabamos, debido a que lo que cuenta es su capacidad para transmitir vibración a la caja a travé s de la tensión generada en su extremo.

La figura muestra la evoluación del peso de la tensión asociada a cada modo, respecto al modo, fundamental, según el punto de apoyo se desplaza del centro hacía el extremo de aoyo.

En este análisis no hemos valorado cual puede ser el orden de magnitud de la tensión vertical en el extremo. Para valorar este orden de magnitud basta tomar el caso más sencillo, el de la cuerda pulsada en punto medio. Sustituyendo en la ecuación **??** los vaores $\xi_0 = 1/2$ y $n = 1$ y suponiendo que $\delta_0/L \sim 0,01$ se tiene que la tensión para $x = 0$ es $T_0/T \sim 2{,}5\,\%$. Es decir

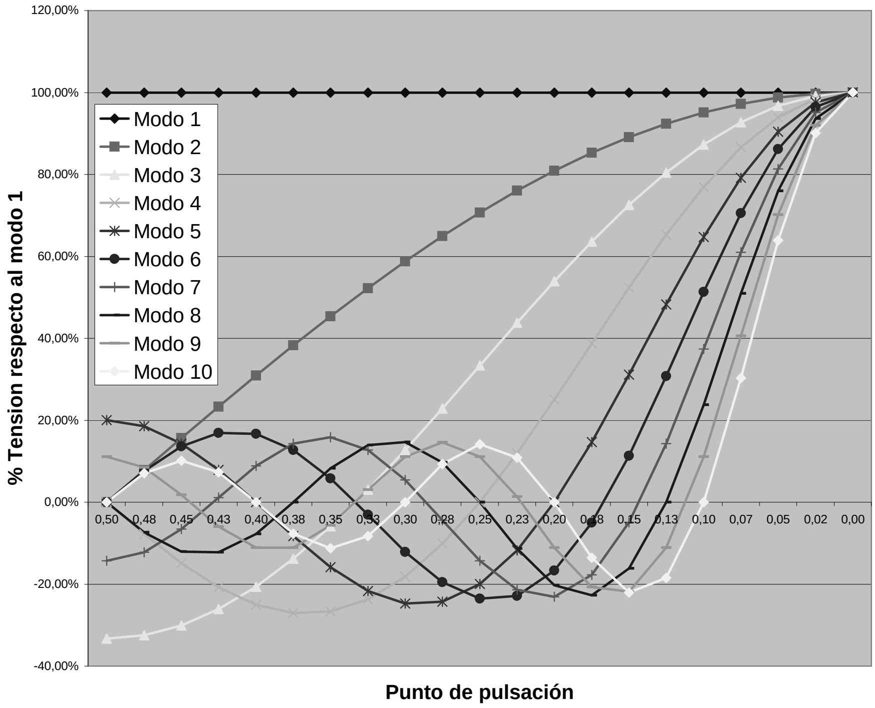

Figura A.2: Evolución de la tension vertical con el punto de pulsación

la tensión vertical es del orden de la centénsima parte de la tensión lineal de la cuerda, lo cual no es tan poco, si se recuerda que las cuerdas de los instrumentos pueden llegar a tener una tensión considerable.

Otra cosa es como responda la caja a dicha tensión, que tiene también un caracter periódico. Y esto es objeto del análisis del acomplamiento de las vibraciones de la cuerda con la caja.

A.4. Acomplamiento con la caja de resonancía

En un instrumento real, la calidad del sonido depende de forma fundamental de la forma y estructura de la caja de resonancia. Como ya hemos comentado, es realmente la caja (con su mayor) superficie la que puede movilizar el aire de forma significativa para hacerlo llegar a nuestro oidos. Ahora bien, ¿como se relaccionan las vibraciones de la cuerda con las de la caja?.

En análisis de esta interacción se puede hacer de forma, relativamente simple, pensando que la caja, como tal, también tiene unas formas naturales de vibrar, unos modos naturales de vibración y, a partir de ahí, estudiando como interactúan, o acoplan, los modos de vibrar de la cuerda con los de la caja.

Los modos de vibrar de la caja de resonancia son, lógicamente, mucho más complejos que los que corresponden a la cuerda, básicamente por que la caja tiene una estructura y forma más compleja. De entrada se trata de un cuerpo tridimensional y sus vibraciones serán tridimensionales (aunque las más importantes e interesantes serán las que suponen desplazamiento de la tapa superior e inferior en sentido perpendicular, ya que estos modos son los que pueden movilizar un volumen apreciable de aire.

Hoy en día existen métodos muy bien establecidos para estudiar los modos de vibración de cualquier objecto. Por un lado se pueden realizar mediciones experimentales (lo que es el método más preciso). Éstas consisten en excitar la caja con una vibración cualquiera y medir su respuesta para identificar cuales son sus modos de vibración. Estos modos se corresponderán a frecuencias concretas y a formas específicas. La forma de vibración también puede medirse fácilmente mediante la utilización de acelerómetros, esto la colocación de instrumentos (llamados transductores) que miden el desplazamientos de puntos específicos del objeto. De esta forma se puede medir con gran precisión cuales son las frecuencias y las formas de los modos naturales.

La segunda forma de realizar este análisis consiste en la construcción de modelos númericos del objeto. Se pueden emplear varias técnicas, pero la más extendida y útil es la construcción de modelos a base de los llamados Elementos Finitos. Éste tipo de modelos recoge de forma aproximada la estructura del objeto y permite, mediante software adecuado, deducir los modos naturales de vibración del modelo, que aproximadamente serán los del objeto real. En la medida de que le modelo seá más sofisticado los resultados de este método tenderán a coincidir con los resultados experimentales.

Todo estos análisis son bien conocidos y, han sido objeto de múltiples estudios, cuyo análisis no es necesario hacer aquí. Baste sin embargo señalar algunos resultados ilustrativos, como por ejemplo los reportados por Russell [**?**] que dan lugar a los siguientes modos de vibración de una guitarra acústica Hummingbird: 103 Hz, 188 Hz, 202 Hz, 231 Hz, 262 Hz, 315 Hz, 385 Hz, 481 Hz Hz, 749 Hz. De cuya lista se han eliminado los modos que Rusell considera estructurales, es decir deformaciones de la guitarra (del mastil por ejemplo) que no producen una presión sobre el aire en la caja acústica. Russel considera que los seis primeros modos (correspondientes a lo que él llama frecuencias bajas y medias son los más relevantes desde el punto de vista acústico, especialmente los tres primeros). La figura **??** también debida a Russel muestra uno de los modos de vibración obtenidos, en particular el que corresponde a 188 Hz.

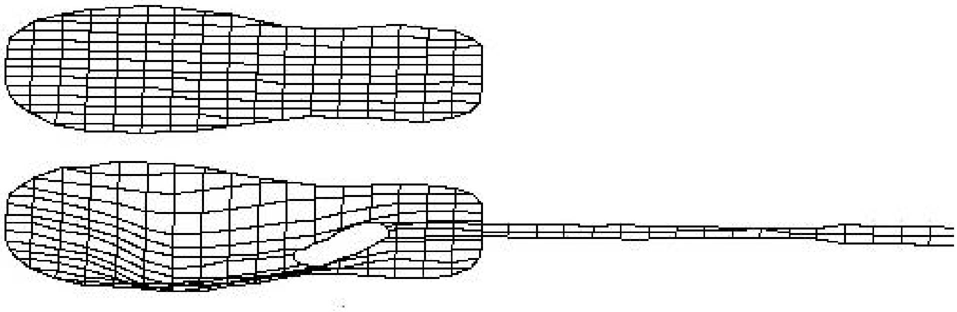

Figura A.3: Ejemplo de modo de vibracion segun Russell, 188 Hz

En lo que respecta a la interacción con la cuerda, se trata entonces de ver como esos modos de la caja interactuan con los modos de la cuerda. Para hacernos una idea orientativa del mecanismo. Basta analizar la respuesta de un modelo que tenga un único modo de vibración y que este sometido a una fuerza externa de caracter periódico (la tensión en el punto de apoyo). Otra forma sería estudiar la vibración conjunta de la cuerda con el modo de la caja, pero puede verse que como la masa de la caja y de la cuerda son muy diferentes, las vibraciones son prácticamente independientes, es decir estan desacopladas: la vibración del caja no afecta a la de la cuerda significativamente.

En estas condiciones el modelo sencillo sería el de la figura **??**, donde se ha introducido el fenómeno de amortiguamiento del modo correspondiente a la caja. Esto es importante pues claro que en este caso la caja si que presenta una amortiguamiento significativo, sobre todo porque irradía energía a través de la impulsión que hace del áire. El tipo de amortiguamiento utilizado en el modelo es el habitual y sencillo amortiguamiento viscoso (proporicional a la velocidad), aún cuando el real pueda no responder a este modelo. Este tipo de amortiguamiento tiene la ventaja de que da lugar a ecuaciones sencillas y bien conocidas que pueden analizarse de forma elemental, como se hizo antes para las vibraciones libres de la cuerda.

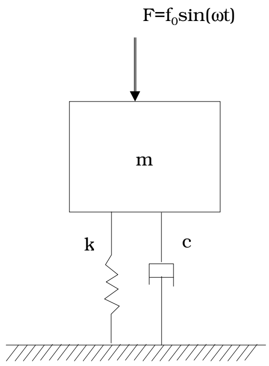

Figura A.4: Modelo para el estudio de la vibración forzada

En estas condiciones se puede demostrar fácilmente que si se llama m a la masa del k a la rigidez del muelle (siendo por lo tanto la frecuencia natural de vibración de ese sistema f_0 la que corresponde a $\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{k}{m}$, la respuesta de la amplitud máxima de la vibración x sigue la expresión

$$x = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\zeta\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2}} \tag{A.17}$$

donde ζ sería el factor de amortiguamiento, definido como $\zeta = \frac{c}{c_r}$, siendo c_r el conocido como amortiguamiento crítico [4] y vale $c_r^2 = 4mk$.

[4]El significado de este valor se entiende fácilmente al estudiar las vibraciones libres de un sistema amortiguado. Es aquel valor que justamente separa los regímenes de amortiguamiento super-crítico y sub-crítico. En el amortiguamiento super-crítico, el movimiento libre de la masa esta dominado por la amortiguación y la masa se para antes de completar una oscilación. En el amortiguamiento sub-crtítico, la amortiguación no puede con la vibración y la masa oscila aunque, lógicamente, acaba parándose. Con el valor del amortiguamiento crítico, la masa se pararía justa en su posición de reposo natural.

De esta expresión es fácil ver que la amplitud de la vibración varia considerablemente al variar la pulsación de la excitación ω, siendo fundamental su relación con la pulsación correspondiente al modo natural de vibrar ω_0. La figura **??** muestra los bien conocidos resultados correspondiente a este modelo sencillo.

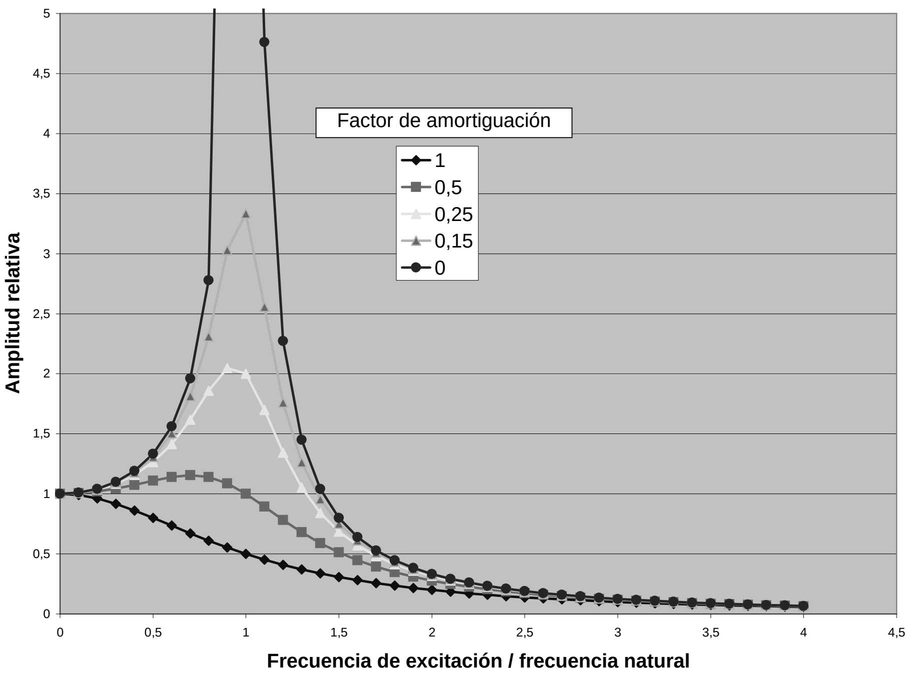

Figura A.5: Amplitud de la oscilación forzada

De lo anterior se deduce que interesa que la caja de resonancia tenga modos naturales de vibración que estén en el rango de la frecuencias que tienen interés desde el punto de vista musical. Naturalmente, no existirán modos de vibración para todas las notas de interés, pero en tanto haya una cobertura razonable del rango de interés la guitarra sonará bien.

En la práctica musical de la guitarra la música se suele escribir una octava por encima de lo que realmente suena. Es decir, el 'la' central (el que esta justo por encima de la clave de sol en el pentrama) suena realmente a 220 Hz en vez de lo que ocurre en otros instrumentos en los que suena a 440 Hz. Esta consideración permite estimar que la mayor parte de los tonos fundamentales que se encuentran en la música para guitarra podrían estar entre los 110 Hz y los 880 Hz (los dos 'la' por encima y por debajo del referido). En este sentido cabría esperar que los pricipales modos de vibración de la caja de resonancia esten en este rango de frecuencias, lo que los resultados de ....., entre otros muchos, vienen a confirmar.

A.5. Estudio de la cuerda percutida

El análisis del modelo de la cuerda pulsada nos ha servido para identificar un buen número de propiedades interesantes de los tonos musicales. Dichon análisis tiene además el interés de que presentra resultados que pueden generalizarse a otros instrumentos más complejos. El análisis de dichos instrumentos mediante métodos matemáticos puede llegar a ser muy complejo y, por otro lado, resulta innecesario para el propósito de este libro.

Existe sin embargo un instrumento al que si dedicaremos una minima atención adicional: el piano. Este instrumento consiste en una serie de cuerdas tensadas que, a diferencia de la guitarra, no son pulsadas sino percutidas o impactadas por un martillo. El martillo es activado al apretar una tecla, siendo la velocidad del impacto dependiente de la velocidad ('la fuerza suele decirse') con que se aprieta la tecla.

Como pasa con la guitarra, la técnica constructiva del piano ha ido mejorando a lo largo de los siglos y un buen piano actual es un elemento muy sofisticado con inumerables detalles constructivos que son fruto de la experiencia e inventiva acumulada de cientos o miles de artesanos. Así, modelar adecuadamente el piano sería de nuevo labor compleja que no podemos abordars. Sin embargo, si puede abordarse el estudio de un caso simplificado consistente en una cuerda tensada en sus extremos que es impactada en un instante por un martillo que luego se retira instantáneamente. Como luego comentaremos este caso se diferencia de la mecánica real del piano en algunos aspectos importantes pero su estudio no deja de tener interés.

Asi, las condiciones iniciales correspondientes a este caso serían

$$y(x,0) = 0 \text{ y} \dot{y}(x,0) = 0 \text{ para todo} x \neq x_0 \text{ y} \dot{y}(x,0) = v_0 \text{ para} x = x_0 \quad \text{(A.18)}$$

donde x_0 sería el punto de impacto y v_0 la velocidad inicial impartida a dicho punto.

Puede demostrarse fácilmente, siguiendo pasos muy similares a los empleados en la sección **??** que el resultado es de la forma **??**, donde $D_n = 0$ y

$$Cn = \frac{2v_0}{n\pi c} \sin(\frac{n\pi x_0}{L}) \quad \text{(A.19)}$$

Este resultado difiere, fundamentalmente, del obtenido para la cuerda pulsada en que la amplitud máxima decae con el inverso de n mientras que en aquel caso lo hacía con el de n^2. Esta simple observación ya nos indica que cabe esperar que los armónicos superiores sean más importantes en el caso de la cuerda percutida.

En efecto la representación de la solución anterior en forma gráfica (ver figura **??**) muestra los modos no solamente no decaen tan rápidamente como en el caso de cuerda pulsada sino que en ciertas zonas (cuando el punto de impacto se sitúa alrededor de $0,1$) en que los primeros modos tienen todos una amplitud similar.

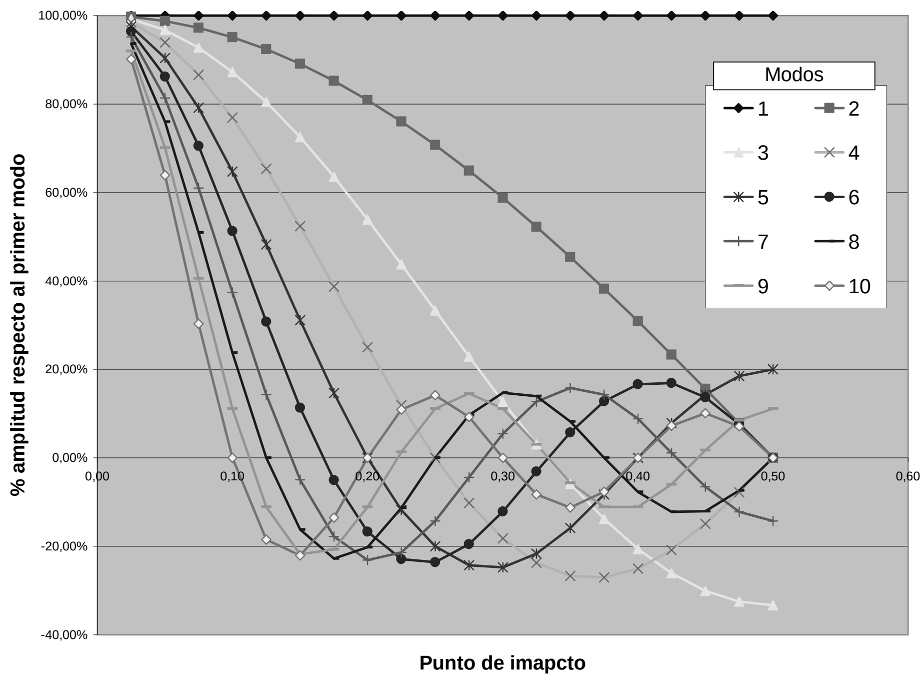

Figura A.6: Amplitud de los modos en la caso de la cuerda percutida

En el caso real del piano, estos resultados se ven modificados de forma relevante, porque realmente el impacto del martillo no se corresponde con el que representa el modelo anterior. Los martillos del piano tienen una cabeza acolchada, de diversa elasticidad, que se comprime en el momento del impacto y que hace que el empuje no sea realmente instantáneo sino que el martillo empuje la cuerda durante unos breves instantes. Helmholtz [**?**] analiza y comenta este caso en detalle en su monumental obra. De hecho realiza un análisis matematemático algo más complejo que el aquí presentado para presentar unos resultados algo más realistas. Además, recoje comentarios muy interesantes sobre experiencia práctica percutiendo cuerdas de piano real, así como observando el diseño que los artesanos han ido dando a los martillos, diseño que como el comenta suele ir cambiando segun uno se mueve a lo largo de las teclas del piano.

Existen multitud de análisis más recientes, como por ejemplo los realizados por Hall[**?**], que realiza una comparación entre los resultados teóricos, derivados de modelar diversos grados de elasticidad del martillo. Uno de sus resultados consiste en la medición experimental de la respuesta modal del piano cuando se pulsa el do central. Estos resultados se muestran en la figura **??**.

Es interesane recordar que todos estos hermosos resultados no hacen sino explicar o confirmar lo que los artesanos 'lutiers' han ido aprendiendo durante siglos. Ellos han sido capaces de acumular una experiencia ríquisima y construir unos instrumentos hermosos y maravillosos, y, ciertamente, para ello no han necesitado de ecuaciones ninguna clase sino de paciencia, ensayo y cariño por trabajo bien hecho. El resultado de esta combinación es naturalmente superior a la que cualquier se llegaría con el análisis teórico más sofisticado.

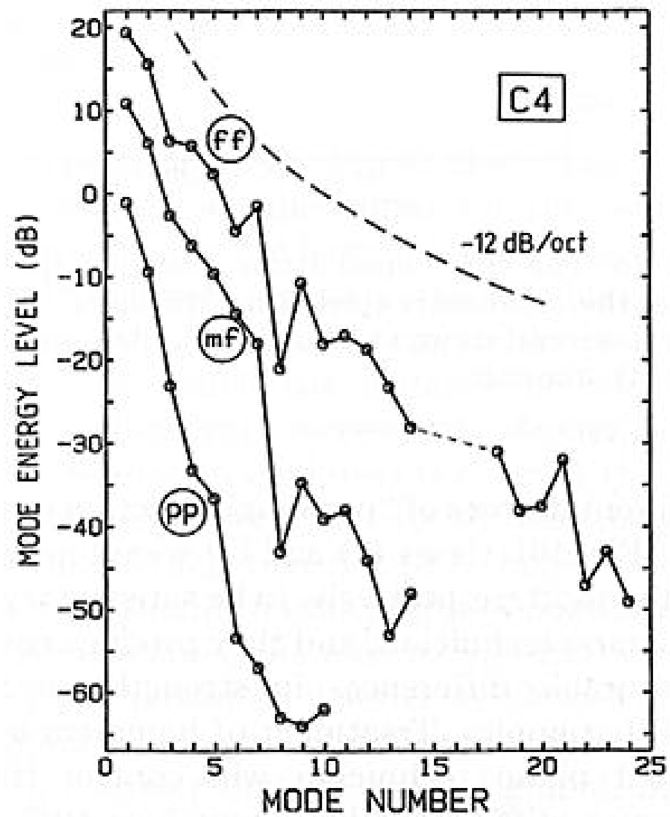

Figura A.7: Respuesta modal de un piano al do central